线性多变量反馈系统分析的复变方法

〔英〕 I. 波斯特莱夫维特
A. G. J. 麦克法兰 著

科学出版社

线性多变量反馈系统分析的复变方法

〔英〕 I. 波斯特莱夫维特
A. G. J. 麦克法兰 著

黄 琳 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

I. 波斯特莱夫维特与 A. G. J. 麦克法兰所著《线性多变量反馈系统分析的复变方法》一书，是第一本将经典控制理论中行之有效的频率方法与根轨迹方法推广至多变量系统的著作．全书共分七章，分别讲述了引言、预备知识、特征增益函数与特征频率函数、广义 Nyquist 判据、广义逆 Nyquist 判据、多变量根轨线、参数稳定与进一步研究的问题等．并为不甚熟悉代数函数、Riemann 曲面等数学内容的人写了简明的附录．全书篇幅不大但叙述严谨．由于作者把经典控制理论与现代多变量控制理论结合在一起，因而不仅在理论上而且在实际应用上都给读者带来利益与兴趣．

本书可供控制工程、控制理论、系统理论以及应用数学方面的科学工作者、大学教师、工程师、研究生以及有关专业的高年级学生阅读．

I. Postlethwaite, A. G. J. MacFarlane

A COMPLEX VARIABLE APPROACH TO THE ANALYSIS OF LINEAR MULTIVARIABLE FEEDBACK SYSTEMS

Springer-Verlag 1979

线性多变量反馈系统分析的复变方法

〔英〕 I. 波斯特莱夫维特 A. G. J. 麦克法兰 著

黄 琳 译

责任编辑 李淑兰

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 3 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1986 年 3 月第一次印刷 印张：4 3/4

印数：0001—4,200 字数：103,000

统一书号：15031 · 708

本社书号：4672 · 13—8

定价： 1.15 元

译　者　序

自从六十年代线性多变量控制理论问世以来，如同一切新的理论出现一样，它与原有的经典控制理论之间产生了许多的不协调. 这里既有这两方面理论本身的原因，也有一些难以避免的社会因素. 这种不协调在一段时间里甚至发展到如本书作者所说的“裂痕”的程度，这种状况的形成是不奇怪的甚至可以说是自然的.

人们常说的经典控制理论，一般是指本世纪五十年代前创立的单回路调节理论. 这一理论的出现首先不是由于严格的具有完整体系的一套数学而是由于工程与物理的推动，数学在这里是作为论证与推演控制思想的工具，而控制本身的结论及其表述也远未数学化. 这一理论的两个主要方法，频率法与根轨迹法也都具有相当强的工程与物理意义，而且这一理论还能针对实际的工程要求（例如过渡过程时间，超调量，振荡次数等）提出一些实际的解决办法. 正由于此，迄今在相对简单的控制系统，如单回路调节系统与随动系统设计中，经典控制理论所提供的方法仍然是主要的也是行之有效的. 随着工程系统的复杂化或控制要求的提高已不能对系统采用过于简化的模型，而且将控制理论向其它应用领域扩展，例如经济系统，环境系统等，都使经典控制理论所提供的方法碰到了难以克服的困难，这是由于这些系统从本质上说来是多变量多回路的系统，而要将它们强行纳入单回路系统的框框是很难奏效的. 这表明经典控制理论不作适当的改造与发展使其适应多变量多回路的特点，就不可能在今天更为复杂的控制

系统中发挥作用．而且为了适应新的复杂系统的要求，没有深刻的理论思维（包括深刻的数学理论思维）也是很难取得成功的．

六十年代兴起的线性多变量控制理论，在描述方法上一开始就采用了状态空间模式，这种模式把系统归结为三个或四个具有适当阶次的矩阵．由于这种模式的一般性，不少控制问题就归结为这几个矩阵或它们所代表的映射应具有的要求和满足的关系．这样控制系统的一些问题经过转化就成为比较纯化的数学问题特别是线性代数问题，例如可控性、任意配置极点、内模原理等．这些问题的解决已经在实际系统分析与设计中起到了作用，特别由于计算机与计算方法的进步，又使这一理论得到了新的动力——利用先进的计算手段来开拓理论的应用领域，这样不仅在理论上而且在各种计算机辅助设计上都得到了发展．尽管如此，由于这种模式的一般化，它与实际工程系统的结合总有一段距离，对于这种模式我们也难以将具体的控制工程要求提成数学便于接受的形式，而且对于这种模式由于其物理工程背景的不直接，因而物理与工程的洞察力在这里也难以起到作用．于是对熟悉工程与物理的控制工程师说来，在相当长的一段时间里总是不乐于采用线性多变量系统的理论来解决控制工程问题，即使在碰到复杂的系统，他们也仍然想用单回路的经典理论去套，致使碰到一些难于克服的困难．

这就是二十多年来控制理论发展过程中的现实，面对这个现实一些人不是固守在经典控制理论或线性多变量系统理论的一个方面，去谋求在已有的框框内进行发展，更不是站在一方去论证另一方的局限性，而是采用兼收二者之长以补二者之短将这两方面结合起来的做法．这里译出的 Ian, Postlethwaite 与 Alistair, G. J. MacFarlane 合著的《线性多变量反馈

系统分析的复变方法》一书，就是这样的一本著作. 相信，本书的内容无论对于从事控制工程还是从事控制理论的人来讲，都是会引起浓厚的兴趣的.

为了将经典控制理论中的两个主要方法，频率法或 Nyquist 方法与根轨线法或 Evans 方法推广至多变量情形，而现在闭环频率与开环增益之间的关系已经是多值化的代数函数关系，出于问题本质上的复杂性，作者运用代数函数理论及与之相关的 Riemann 曲面结构来阐述问题，得到了比较清楚的结果. 虽然代数函数理论与 Riemann 曲面的结构对控制界比较生疏，但由于作者对这些理论作了比较形象的叙述并且提供了具体的计算方法，就使得这些理论读起来并不枯燥而且可以学会如何实际应用. 实际上即使对经典控制理论中的根轨迹方法，为了使理论清楚严谨，引进代数函数与 Riemann 曲面也是可取的.

由于本书是这方面的第一本著作，原书写作中有其自身的特点，加之本人业务水平所限，失误疏漏之处难免，敬请读者指正.

祝愿本书中文版的出版能在我国控制理论及其应用的事业中，在促进我国控制工程与控制理论两方面的合作中起到应有的作用.

北京大学力学系　黄　琳

1984. 8. 25

目　　录

第一章 引　言

在五十年代后期与六十年代初的一段时间里，最优控制与最优滤波技术在空间研究方面取得了巨大成功，这就自然地导致将这些方法应用于世间各种多变量工业过程的努力．这种努力在很多场合并不能直接奏效，特别比起空间研究来说，这里所采用的装置的模式是不精确的，或者用来刻划受控装置品性的品质指标也不明确．而且，基于直接应用最优控制与最优滤波方法的控制器，其综合方法一般讲是复杂的；事实上如果要装上一个完全的 Kalman-Bucy 滤波器，由于该滤波器应由受控装置的模式与其周围的反馈所组成，这样其动态复杂程度就将与受控对象相当．与此相反，对不少多变量过程控制问题来说，真正需要的乃是相对简单的控制器，它一方面应能在工作点附近实现镇定且仅要求受控装置有一可用的近似模式，同时它还应能缓和由于引入积分作用后低频干扰的影响．对于惯于用频率响应思维的工业工程师说来，应用深奥的最优控制方法是困难的；这些工程师基本上依靠的是物理的洞察能力和例如用微积分这些直接方法去解决问题．明显的是在由 Nyquist [1], Bode [2] 与 Evans [3] 所奠基且至今还在不少工业应用中采用的经典单回路频率响应方法和在空间应用中发展起来的精美而又有效的多变量时间响应方法之间已存在着巨大的裂痕．

由于这些原因，在六十年代中期慢慢开始恢复了对频率响应方法的关注．在经典频率响应方法与最优控制方法之间弥合裂痕的重要的第一步是由 Kalman [4] 给出的，他研究

了最优性的频率域特征．对多变量系统发展频率响应分析与设计理论的系统性的研究，是从Rosenbrock [5] 的开拓性论文开始的，于是在已复苏了的频率响应方法上开始了增长兴趣的十年． 在这一新起点之前，在多变量控制问题上已经形成了一些直接方法，Boksembom 与 Hood [6] 提出了不相互作用控制器的思想，他们的方法是选择一个级联补偿器以使受补偿系统总传递函数矩阵为对角形．如果求得了这样的补偿器，控制器设计就可以运用标准的单回路设计方法来完成．用这种方法求得的补偿矩阵必然是复杂的，并且该方法明显的缺限乃是仅为减少相互作用就要进行如此冗烦的工作．这一解决多变量控制途径自然的延伸是考虑运用有理矩阵进行标准矩阵计算方法能得到什么．沿着这个思路讨论问题的文章有 Golomb 与 Usdin [7]，Raymond [8]，Kavanagh [9，10，11] 与 Freeman [12，13]．然而，Rosenbrock [14，15] 却用一种谙熟的技术寻求将多变量问题化至经典方法可接受的形式，从而开辟了一个全新的发展路线． 在他的逆 Nyquist 列阵方法 [14，15] 中，其要领就在于减少相互作用到可以采用单回路方法的程度而不是去完全消除相互作用． Rosenbrock 的方法就是基于部分相互作用的特定判据——对角优势概念的精心运用之上的．这一方法的成就在于启示了其他研究者去发展将多变量控制问题化归到单回路问题，例如Mayne[16] 所作的序列返差方法．

在将不相互作用或部分相互作用方法用于多变量控制时，其活力在于在设计研究的最后阶段能分开使用经典的单回路频率响应方法．另一途径则是把传递函数矩阵作为一个单一对象来研究并由其本身来回答：如何把经典单回路频率响应方法的基本概念作适当的扩展？在多变量情况下什么才是极点、零点、Nyquist 图以及根轨迹图这些概念的合适的推

广？对于这类问题，这儿的工作是建议并且阐明复变的思想在多变量反馈系统的研究中可以担当一个重要的角色．将Nyquist图的思想扩展到多变量问题的早期努力是由Bohn[17,18]作出的．MacFarlane [19] 给出 Nyquist 稳定性判据的一个推广，紧接这一启发性结果，Barman 与 Katzenelson [20] 和 MacFarlane 与 Postlethwaite[21] 给出了复变函数的基本证明．随着多变量情形 Nyquist 稳定性判据的推广，不久就出现了根轨迹方法的补充推广 [21，22，23，24]．

本书的目的是将 Nyquist，Bode 与 Evans 方法中的概念扩展到多变量系统．在线性反馈设计的两个经典方法中，Nyquist-Bode 方法是研究增益为频率的函数，而 Evans 方法则研究频率为增益的函数．第三章阐述了研究复增益为复频率的函数和复频率为复增益的函数的思想是怎样扩展至多变量情况的，这里用到与传递函数矩阵（其行列数相同）的一对解析函数：特征增益函数与特征频率函数．这些是代数函数[25]且每个函数均定义在一合适的 Riemann 曲面上[26]．第二章给出了一些基本知识，例如被考虑的多变量反馈系统的典型表述；稳定性的基本定义与有关的定理；基于返差算子之上的开环与闭环特性之间的基本关系．第三章也包含对在第四章中出现的多变量反馈系统的广义 Nyquist 稳定性判据的背景所作的广泛的讨论．这个判据的证明是基于运用在合适的 Riemann 曲面上定义的代数函数的辐角原理．第五章给出一个多变量情况的逆 Nyquist 判据的推广，它是前一章给出的广义 Nyquist 判据的补充．运用在第三章中发展了的材料在第六章把根轨迹方法扩展到了多变量情形，这里很好地运用了代数函数理论的结果．这同样阐明了代数函数的基本方法可以怎样用来寻求多变量时不变最优线性调节器，当二次型性能指标输入项的权趋于零时对应闭环极点的渐近性质．

作为一个推广，显然用到的增益变量可以看作是系统的一个参数，这样已发展了的方法就不仅可运用于增益与频率而且也可运用于任何参数与频率．在第七章用引入参数根轨迹图与参数 Nyquist 轨迹的概念，考虑了多变量反馈系统中参数变化的影响．这一章还包含了一些为进一步研究而作的试验性建议与设想．

次要的信息不放在正文而留在附录上．每一章引用的参考文献列在该章的末尾．在本书的最后还提供了一个总文献目录．

参 考 文 献

[1] H. Nyquist, "Regeneration theory", Bell Syst. Tech. J., 11, 126—147, 1932.

[2] H. W. Bode, "Network analysis and feedback amplifier design", Van Nostrand, Princeton, N. J., 1945.

[3] W. R. Evans, "Graphical analysis of control systems", Trans. AIEE, 67, 547—551, 1948.

[4] R. E. Kalman, "When is a linear control system optimal?", Trans. ASME J. Basic Eng., Series D., 86, 51—60, 1964.

[5] H. H. Rosenbrock, "On the design of inear multivariable control systems", Proc. Third IFAC Congress London, 1, 1—16, 1966.

[6] A. S. Boksenbom and R. Hood, "General algebraic method applied to control analysis of complex engine types", National Advisory Committee for Aeronautics, Report NCA-TR-980, Washington D. C., 1949.

[7] M. Golomb and E. Usdin, "A theory of multidimensional servo systems", J. Franklin Inst., 253(1), 28—57, 1952.

[8] F. H. Raymond, "Introduction a l'étude des asservissements multiples simultanes", Bull. Soc. Fran. des Mecaniciens, 7, 18—25, 1953.

[9] R. J. Kavanagh, "Noninteraction in linear multivariable systems", Trans. AIEE, 76, 95—100, 1957.

[10] R. J. Kavanagh, "The application of matrix methods to multivariable control systems", J. Franklin Inst., 262, 349—367, 1957.

[11] R. J. Kavanagh, "Multivariable control system synthesis", Trans. AIEE, Part 2, 77, 425—429, 1958.

[12] H. Freeman, "A synthesis method for multipole control systems",

Trans. AIEE, 76, 28—31, 1957.
[13] H. Freeman, "Stability and physical realizability considerations in the synthesis of multipole control systems", Trans. AIEE, Part 2, 77, 1—15, 1958.
[14] H. H. Rosenbrock, "Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array", Proc. IEE, 116. 1929—1936, 1969.
[15] H. H. Rosenbrock, "Computer-aided control system design", Academic Press, London, 1974.
[16] D. Q. Mayne, "The design of linear multivariable systems", Automatica, 9, 201—207, 1973.
[17] E. V. Bohn, "Design and synthesis methods for a class of multivariable feedback control systems based on single variable methods", Trans. AIEE, 81, Part 2, 109—115, 1962.
[18] E. V. Bohn and T. Kasvand, "Use of matrix transformations and system eigenvalues in the design of linear multivariable control systems", Proc. IEE, 110, 989—997, 1963.
[19] A. G. J. MacFarlane, "Return-difference and return-ratio matrices and their use in the analysis and design of multivariable feedback control systems", Proc. IEE, 117, 2037—2049, 1970.
[20] J. F. Barman and J. Katzenelson, "A generalized Nyquisttype stability criterion for multivariable feedback systems", Int. J. Control, 20, 593—622, 1974.
[21] A. G. J. MacFarlane and I. Postlethwaite, "The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci", Int. J. Control, 25, 81—127, 1977.
[22] B. Kouvaritakis and U. Shaked, "Asymptotic behaviour of root loci of linear multivariable systems", Int. J. Control, 23, 297—340, 1976.
[23] I. Postlethwaite, "The asymptotic behaviour, the angles of departure, and the angles of approach of the characteristic frequency loci", Int. J. Control, 25, 677—695, 1977.
[24] A. G. J. MacFarlane, B. Kouvaritakis and J. M. Edmunds, "Complex variable methods for multivariable feedback systems analysis and design", Alternatives for Linear Multivariable Control, National Engineering Consortium, Chicago, 189—228, 1977.
[25] G. A. Bliss, "Algebraic functions", Dover, New York, 1966 (Reprint of 1933 original).
[26] G. Springer, "Introduction to Riemann surfaces", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

第二章 预备知识

本书对由几个多输入多输出的子系统串联而后形成的线性时不变反馈动态系统，来考虑经典的 Nyquist 与 Evans 方法的推广. 在这一考虑下，本章给出了多变量反馈系统的描述，并且还给出了稳定性的基本定义、一些与之相关的定理和基于返差算子之上在开环与闭环性质之间的基本关系.

2.1 系统描述

线性时不变动态系统的基本描述取如下状态空间模式:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

其中 $x(t)$ 是状态向量，$y(t)$ 为输出向量，$u(t)$ 为输入向量；$\dot{x}(t)$ 表示 $x(t)$ 对时间 t 的微商；A，B，C 与D是实常数矩阵. 为方便起见上述模式在意义明确的前提下简记为 $S(A, B, C, D)$ 或 S，且用图 1 表示.

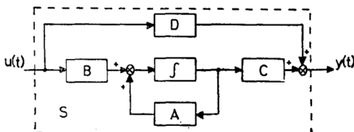


图 1 状态空间模式

一般 $S(A, B, C, D)$ 可认为是由几个状态空间模式的子系统

$$S_i(A_i, B_i, C_i, D_i), \quad \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \qquad (2.1.2)$$
$$i = 1, 2, \cdots, h, \quad y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u_i(t)$$

串联而成的，如图 2 所示.

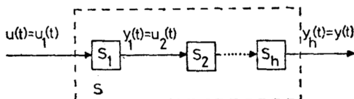


图 2　子系统的串联

例如，若 S 由两个子系统 S_1 与 S_2 组成，则 S 用方程 (2.1.1) 状态空间模式表示，对应有

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}，\text{两子系统的联合状态}$$

$$u(t) = u_1(t), \ S_1 \text{ 的输入} \qquad (2.1.3)$$

$$y(t) = y_2(t), \ S_2 \text{ 的输出}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C = (D_2 C_1 \ \ C_2), \ D = D_2 D_1$$

而由几个子系统串联的状态空间模式则可以通过反复运用上述公式得到.

由于状态空间模式保留了系统的内部动态结构，因而可作为一种**内描述**. 如果对方程 (2.1.1) 两边作单边的 Laplace 变换，就得到

$$\begin{cases} s\hat{x}(s) - x(0) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

其中 $\hat{x}(s)$ 表示 $x(t)$ 的 Laplace 变换，这样就可得到系统的**外描述或输入-输出描述**. 如果在时间 $t=0$ 时的初条件全为零即 $x(0)=0$，则输入与输出变换向量由关系式

$$\hat{y}(s)=G(s)\hat{x}(s) \tag{2.1.5}$$

相联系，其中

$$G(s)=C(sI_n-A)^{-1}B+D \tag{2.1.6}$$

I_n 为 n 阶单位矩阵且 $(\quad)^{-1}$ 表示矩阵的逆. $G(s)$ 是复变量 s 的有理函数矩阵，称为对输入-输出变换集的**传递函数矩阵，或开环增益矩阵**. 传递函数矩阵可用来描述系统在具有指数 s 的指数函数输入下的响应[2]，因而如同在单输入单输出情况下一样，复变量 s 可认为是复数的频率变量.

若 $S(A, B, C, D)$ 如图 2 所示，由 h 个子系统 $(S_i(A_i, B_i, C_i, D_i): i=1, 2, \cdots, h)$ 组成，每个子系统的传递函数矩阵为

$$G_i(s)=C_i(sI_{n_i}-A_i)^{-1}B_i+D_i \tag{2.1.7}$$

于是 S 的输入-输出变换向量由关系式

$$\hat{y}(s)=G_h(s)G_{h-1}(s)\cdots G_1(s)\hat{u}(s) \tag{2.1.8}$$

相联系，因此开环增益矩阵具有明显的关系式：

$$G(s)=G_h(s)G_{h-1}(s)\cdots G_1(s) \tag{2.1.9}$$

为了可以将输出由反馈连接到输入，以下设 $G(s)$ 是一个 m 阶方阵.

2.2 反馈结构

考虑如图 3 所示的一般反馈结构，这里反馈系统的输出是第 h 个子系统的输出，但在实际上它也可以是较前一个子系统的输出，此时其后的子系统可视为反馈补偿器. 参数 k 是整个回路总的实增益控制变量. 系统的输入与输出用方程

$$e(t) = r(t) - y(t)$$
$$u(t) = ke(t) \tag{2.2.1}$$

和参考输入 $r(t)$ 联系在一起. 将它们和方程(2.1.1)结合一起考虑,就可得下述闭环系统的状态空间方程:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c r(t)$$
$$y(t) = C_c x(t) + D_c r(t) \tag{2.2.2}$$

其中

$$A_c = A - B(k^{-1}I_m + D)^{-1}C$$
$$B_c = kB - kB(k^{-1}I_m + D)^{-1}D$$
$$C_c = (I_m + kD)^{-1}C$$
$$D_c = (k^{-1}I_m + D)^{-1}D$$

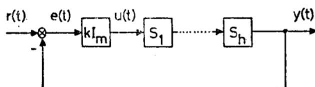


图 3 反馈结构

2.3 稳 定 性

稳定性是反馈系统最重要的一个要求. 对于一般时变非线性系统,稳定性问题是很复杂的,但对于线性时不变系统来说要比一般情形下简单,这是由于

(i) 所有稳定性性质关于时间是恒定的,且

(ii) 由于对系统的状态来说任何解均正比于在时间零时的状态(见方程(2.3.2),于是所有稳定性性质就都是全局的.

在文献中有不少稳定性的定义, 大致说来可分为两类. 第一类定义是关于无输入的自由系统的稳定性; 第二类定义则是关于具有输入的受迫系统的. 两类稳定性均在下面讨

论，其定义以及与之相关的完美的定理可在 Willems 所著 [3] 中找到.

2.3-1 自由系统

对由方程 (2.2.2) 描述的具有 $r(t)=0$ 与 $C_c=I$ (如图 3 所示)的闭环动态系统，其稳定性问题可归结为考虑自由系统

$$\dot{x}(t)=A_c x(t) \tag{2.3.1}$$

方程 (2.3.1) 的平衡态显然是原点 (设 A_c 非奇异)，因而式(2.3.1)的任一解若在某个时间经过原点则在以后的一切时间均留在原点，这样的一个解称为零解. 原点平衡位置的稳定性用下述定义刻划.

定义 1 自由系统(2.3.1)称为稳定系指当系统从原点被扰动后，其一切后继运动总保持在原点的对应小邻域内.

定义 2 自由系统(2.3.1)称为渐近稳定系指当系统从原点受到小的扰动后，其一切后继运动将返向原点.

定义 3 自由系统 (2.3.1) 称为大范围或全局渐近稳定，系指它是稳定的且当 $t\to\infty$ 时每个运动均收敛至原点.

方程(2.3.1)的通解是

$$x(t;x(t_0),t_0)=\exp[A_c(t-t_0)]x(t_0) \tag{2.3.2}$$

它清楚地表明若自由系统渐近稳定则它也大范围渐近稳定. 若 J 系 A_c 的 Jordan 正则型且使

$$A_c=TJT^{-1} \tag{2.3.3}$$

具有

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

其中每个 Jordan 块具有形式

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

λ_i 是 A_c 的一个特征值，于是能够证明有[3]

$$\exp[A_c(t - t_0)] = T\exp[J(t - t_0)]T^{-1} \tag{2.3.4}$$

具有

$$\exp[J(t - t_0)] = \begin{bmatrix} \exp[J_1(t - t_0)] & & & \\ & \exp[J_2(t - t_0)] & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp[J_k(t - t_0)] \end{bmatrix}$$

而

$$\exp[J_i(t - t_0)] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{t} & \underline{t}^2/2! & \cdots & \underline{t}^{r-1}/(r-1)! \\ 0 & 1 & \underline{t} & \cdots & \underline{t}^{r-2}/(r-2)! \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \exp[\lambda_i(t - t_0)]$$

其中 $\underline{t} = (t - t_0)$，$r$ 是 Jordan 块 J_i 的阶数. 这样自由系统的通解就可以表示为

$$x(t_i; x(t_0), t_0) = T\exp[J(t - t_0)]T^{-1}x(t_0) \tag{2.3.5}$$

由此可有下述定理，其证明见[3].

定理 1 系统 (2.3.1) 的零解是渐近稳定的，当且仅当矩阵 A_c 的全部特征值均具有负的实部.

定理 2 系统 (2.3.1) 的零解是稳定的，当且仅当 A_c 没有正实部的特征值，若有零实部的特征值则它只对应 1 阶的 Jordan 块.

2.3-2 受迫系统

考虑闭环动态系统(2.2.2),它的通解是*)[3]

$$x(t;\ x(t_0),\ t_0) = \exp[A_c(t-t_0)]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp[A_c(t-\tau)]B_c r(\tau)d\tau \qquad (2.3.6)$$

为研究该系统的稳定性,我们需要引入输入-输出稳定性的概念.

定义 4 一动态系统称为输入-输出稳定,系指对任何有界输入,不论初始状态如何均产生有界输出.

按定理 1,由未受迫系统(2.3.1)渐近稳定推知 A_c 的全部特征值均具负实部,于是存在正实数 P 与 a,使

$$\|\exp(A_c t)\| \leqslant P\ \exp(-at),\ \forall t \geqslant 0 \qquad (2.3.7)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵或向量的 Euclidean 范数 [3]. 由方程(2.2.2),(2.3.6)与(2.3.7)则有

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leqslant \|C_c x(t)\| + \|D_c r(t)\| \\ &\leqslant \|D_c r(t)\| + \|C_c \exp[A_c(t-t_0)x(t_0)\| \\ &\quad + \left\|C_c \int_{t_0}^{t} \exp[A_c(t-\tau)]B_c r(\tau)d\tau\right\| \\ &\leqslant dM + cP\|x(t_0)\| + \frac{cbMP}{a},\quad \forall t \geqslant t_0\end{aligned}$$

其中 $b = \|B_c\|$, $c = \|C_c\|$, $d = \|D_c\|$, $\|r(t)\| \leqslant M$, $\forall t \geq 0$**).

---

*) 原书误为

$$x(t;\ x(t_0),\ t_0) = \exp(A_c t)x(t_0) + \int_0^t \exp[A_c(t-\tau)]B_c r(\tau)d\tau.$$

——译者注

**) 原书误为 $\|y(t)\| \leqslant \cdots \leqslant \|D_c r(t)\| + \|C_c \exp(A_c t)x(t_0)\|$

$$+ c\int_0^t \|\exp[A_c(t-\tau)]\|\|B_c r(t)\|d\tau \leqslant dM + cP\|x(t_0)\| + \frac{cbMP}{a}.$$

——译者注

这一结果可归结为

定理 3 若未受迫系统 (2.3.1) 的零解渐近稳定,则受迫系统(2.3.2)输入-输出稳定.

注意要由输入-输出稳定性推知原点平衡位置的渐近稳定还必须有系统 (2.2.2) 状态可控且状态可观测;或其一切不可观测与不可控模均具负实部. 在本书以后的讨论中,系统**稳定性**就理解为输入-输出稳定和在原点平衡位置的渐近稳定.

定理 3 重要之处在于线性时不变系统的稳定性能仅由系统的"A"矩阵的知识判定. 稳定性所关系到的闭环动态系统(2.2.2)的特征值是指满足方程

$$\det[\lambda I_n - A_c] = 0 \tag{2.3.8}$$

的 λ 的值. 方程 (2.3.8) 的左端称为闭环特征多项式,简记为 CLCP(λ), 即

$$\mathrm{CLCP}(\lambda) \triangleq \det(\lambda I_n - A_c) \tag{2.3.9}$$

相应地对开环系统 $S(A, B, C, D)$,开环特征多项式 OLCP(λ) 定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{OLCP}(\lambda) &\triangleq \det(\lambda I_n - A)\\ &= \det(\lambda I_{n_1} - A_1)\det(\lambda I_{n_2} - A_2)\cdots\\ &\quad \times \det(\lambda I_{n_h} - A_h)\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

下一节将阐明开环与闭环的特征多项式可用返差算子联系起来[5].

2.4 一般反馈结构的开环与闭环特征多项式间的关系

设一般闭环结构的总反馈被切断且子系统均用传递函数矩阵表示, 如图 4 所示. 对这一切断点说来对应的返差矩阵

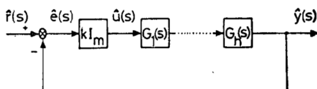
是

$$F(s) \triangleq I_m + L(s) \tag{2.4.1}$$

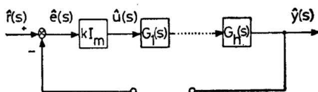
其中

$$L(s) = kG_h(s)\cdots G_1(s) = kG(s) \tag{2.4.2}$$

称为系统的返比矩阵 [5]．返差算子是由进入信号的变换所产生的进入与返回信号变换的差．由于建立反馈线的本质在于造成两信号集恒等从而使在其中的差恒为零，这样在反馈理论中返差算子就起着重要的作用．$F(s)$ 与 $L(s)$ 均为复变量 s 的有理函数矩阵，本书的关键概念都是围绕这些矩阵的性质建立起来的．返差矩阵在建立开环与闭环特征多项式之间的关系上的重要性受到了重视，现在用一般反馈结构来推导它．



(a)



(b)

图 4　反馈结构．(a) 闭环；(b) 开环

若取方程(2.4.1)的行列式且将 $G(s)$ 用状态空间模式表出，则有

$$\det F(s) = \det [I_m + kC(sI_n - A)^{-1}B + kD] \quad (2.4.3)$$

再应用分块行列式计算的 Schur 公式则可将上式改写为

$$\det F(s) = \det \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -kC & I_m + kD \end{bmatrix} \div \det(sI_n - A) \quad (2.4.4)$$

它等价于

$$\det F(s) = \det \left[\begin{array}{c|c} I_n & -B(I_m + kD)^{-1} \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] \det \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -kC & I_m + kD \end{bmatrix} \div \det(sI_n - A)$$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} sI_n - A + B(k^{-1}I_m + D)^{-1}C & 0 \\ \hline -kC & I_m + kD \end{array}\right] \div \det(sI_n - A)$$

$$= \frac{\det[sI_n - A + B(k^{-1}I_m + D)^{-1}C]\det(I_m + kD)}{\det(sI_n - A)} \quad (2.4.5)$$

而由方程(2.2.2)有

$$A_c = A - B(k^{-1}I_m + D)^{-1}C$$

因而在假定 $\det F(\infty) \neq 0$ 后由式(2.4.5)可有下述关系式：

$$\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} = \frac{\det [sI_n - A_c]}{\det [sI_n - A]} = \frac{\det [sI_n - A_c]}{\det[sI_{n_h} - A_h]\cdots\det [sI_{n_1} - A_1]} \triangleq \frac{\mathrm{CLCP}(s)}{\mathrm{OLCP}(s)} \quad (2.4.6)$$

开环与闭环特征多项式 OLCP(s) 与 CLCP(s) 的零点就是

开环和闭环的极点或其对应的特征频率.

关系式(2.4.6)指出了矩阵值有理传递函数是怎样与动态反馈系统的稳定性紧密相关的. 对这些矩阵及其特征值的研究开辟了一个将经典 Nyquist [7] 与 Evans [8,9] 技术进行适当扩展的途径. 这一结果将在第三章中给出.

参 考 文 献

[1] R. Bracewell, "The Fourier Transform and Its Applications", McGraw-Hill New York, 1965.

[2] A. G. J. MacFarlane and N. Karcanias, "Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory", Int. J. Control, 24, 33—74, 1976.

[3] J. L. Willems, "Stability Theory of Dynamical Systems", Nelson, London, 1970.

[4] P. M. Cohn, "Algebra", Vol. 1, Wiley, London, 1974.

[5] A. G. J. MacFarlane, "Return-difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems", Proc. IEE, 117, 2037—2049, 1970.

[6] F. R. Gantmacher, "Theory of Matrices", Vol. 1, Chelsea, New York, 1959.

[7] H. Nyquist, "The Regeneration Theory", Bell System Tech. J., 11, 126—147, 1932.

[8] W. R. Evans, "Graphical Analysis of Control Systems", Trans. AIEE, 67, 547—551, 1948.

[9] W. R. Evans, "Control System Synthesis by Root Locus Method", Trans. AIEE, 69, 1—4, 1950.

第三章　特征增益函数与特征频率函数

在线性单回路反馈系统的分析与设计中，两个经典方法均用复变函数去研究作为频率函数的开环增益（Nyquist-Bode方法）和作为增益函数的闭环频率(Evans 方法).本章的目的在于表明这些方法是怎样用与复变量适当的有理函数矩阵相联系的特征增益函数与特征频率函数扩展至多变量的情形.

3.1　开环增益与闭环频率间的对偶性

对图 4 所示的一般反馈结构，由第 2.4 节可以有如下的基本关系:

$$\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)}=\frac{\det(sI_n-A_c)}{\det(sI_n-A)} \tag{3.1.1}$$

其中返差矩阵 $F(s)$ 给定为

$$F(s)=I_m+kG(s) \tag{3.1.2}$$

若将 $F(s)$ 代入式(3.1.1),则有

$$\frac{\det(sI_n-A_c)}{\det(sI_n-A)}=\frac{\det(I_m+kG(s))}{\det(I_m+kD)}$$

$$=\frac{\det(k^{-1}I_m+G(s))}{\det(k^{-1}I_m+D)} \tag{3.1.3}$$

若再应用表达式,

$$g=-\frac{1}{k} \tag{3.1.4}$$

来替换增益，其中 g 可以是复数，即 $g\in\mathbf{C}$（复平面），则有

$$\frac{\det(sI_n - A_c)}{\det(sI_n - A)} = \frac{\det(gI_m - G(s))}{\det(gI_m - D)} \tag{3.1.5}$$

而由式(2.2.2)给出的闭环系统矩阵 A_c 是

$$A_c = A - B(k^{-1}I_m + D)^{-1}C \tag{3.1.6}$$

用式(3.1.4)代换 k 则有

$$A_c = A + B(gI_m - D)^{-1}C$$
$$\triangleq S(g) \tag{3.1.7}$$

这样表达式(3.1.5)可改写成

$$\frac{\det[sI_n - S(g)]}{\det[sI_n - A]} = \frac{\det[gI_m - G(s)]}{\det[gI_m - D]} \tag{3.1.8}$$

或

$$\frac{\det[sI_n - S(g)]}{\det[sI_n - S(\infty)]} = \frac{\det[gI_m - G(s)]}{\det[gI_m - G(\infty)]}$$

这个关系式表明在复频变量 s 与复增益变量 g 之间通过其对应的“亲”矩阵 $S(g)$ 与 $G(s)$ 表现出一种严格的对偶性．这个在频率和增益的法则之间的对偶性构成了将经典复变方法推广至多变量情形的基础．$S(g)$ 称为闭环频率矩阵；它的特征值是闭环特征频率且显然依赖于增益变量 g． 开环增益矩阵 $G(s)$ 的特征值称为开环特征增益且显然依赖于频率变量 s．在考虑到 $G(s)$ 与 $S(g)$ 的状态空间结构

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \tag{3.1.9}$$

$$S(g) = B(gI_m - D)^{-1}C + A \tag{3.1.10}$$

以后，它们之间的类似性就更明显了．

从图 5 上可以看出，图 4(a) 在具有零参考输入下的反馈结构，对 $G(s)$ 的状态空间描述和以式(3.1.4)代换 k 被重画出来的闭环特征频率变量 s 与开环特征增益变量 g 之间的对偶性．

关系式(3.1.8)的重要性在于说明对 $s \notin \sigma(A)$ 和 $g \notin \sigma(D)$（等价于假定 $\det F(\infty) \neq 0$）的变量说来，有

$$\det[sI_n - S(g)] = 0 \longleftrightarrow \det[gI_m - G(s)] = 0 \quad (3.1.11)$$

其中 $\sigma(A)$ 表示 A 的谱. 这一点告诉我们关于开环特征增益作为频率的函数的知识等价于作为增益的函数的闭环特征频率的知识，由此可以断言从 $G(s)$ 的特征增益谱线来断定反馈系统的稳定性应该是可能的. 注意到这一点由式(3.1.8)可以有

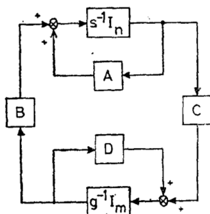


图5 说明 s 与 g 之间对偶性的反馈结构

$$\mathrm{CLCP}(s) = \frac{\det[gI_m - G(s)]\mathrm{OLCP}(s)}{\det(gI_m - D)} \quad (3.1.12)$$

这一表达式将使 Nyquist 稳定性定理推广至作为频率函数 $G(s)$ 的特征增益轨线上的这件事变得很明显.

3.2 代数函数：特征增益函数与特征频率函数

$G(s)$ 与 $S(g)$ 的特征方程

$$\Delta(g, s) \triangleq \det(gI_m - G(s)) = 0 \quad (3.2.1)$$

与

$$\nabla(s, g) \triangleq \det(sI_n - S(g)) = 0 \quad (3.2.2)$$

是复变量 s 与 g 的代数方程，每个方程均可作为 g（或 s）以 s（或 g）的有理函数为系数的多项式来考虑. 若在有理函数域上为不可约，则每个方程定义一个代数函数对[1; 附录 1]:

(i) **特征增益函数 $g(s)$**，它给出开环特征增益为频率的函数.

(ii) **特征频率函数 $s(g)$**，它给出闭环特征频率为增益的函数.

一般说来方程(3.2.1)与(3.2.2)并不是不可约的，且每个方程将定义一特征增益与特征频率函数的集合. 为了简单起见同时从实际提出的 $G(s)$ 与 $S(g)$ 的通常情形出发，可以认为方程(3.2.1)与(3.2.2)在有理函数域上不可约是合适的.

虽然方程 (3.2.1) 与 (3.2.2) 定义的是同一函数 $g(s)$ 与 $S(g)$，但方程(3.2.2)一般讲将含有较多系统的信息. 在某种情况下将可能出现 $\nabla(s, g)$ 含有与 g 无关的因子而该因子在 $\Delta(g, s)$ 中并不出现. 这类因子常发生于下述情形:

(i) 考虑其输入为第 1 子系统的输入，输出为第 h 子系统的输出所对应的开环系统 $S(A, B, C, D)$，其 A 矩阵具有对应系统不可观测或不可控模的特征值. 注意若对较前子系统的输出测量是有效的，则实际上 $S(A, B, C, D)$ 的某些不可观测模可以是可观测的.

(ii) 当开环增益矩阵 $G(s)$ 的极点与零点不同于特征增益函数 $g(s)$ 的极点与零点时;参见第 3.3-3 节.

使式(3.2.1)与 (3.2.2) 不同的这两种情况，清楚地表明了把 Nyquist 类判据发展到 $G(s)$ 的特征增益轨线上所出现的问题. 但是利用 $g(s)$ 的极点和零点与 $G(s)$ 的极点和零点之间的联系，再仔细地考虑不可观测与不可控模，这些问题就都能克服. 广义的 Nyquist 判据将在第四章给出.

在下一节，将给出特征增益函数的详尽讨论，并以此作出根轨迹图的一个推广. 而第 3.4 节将对特征频率函数的相应研究给出一个广义 Nyquist 图.

3.3 特征增益函数

定义特征增益函数的一个自然途径是运用特征方程

$$\Delta(g, s) \triangleq \det [gI_m - G(s)] = 0 \qquad (3.3.1)$$

一般讲 $\Delta(g, s)$ 可化成下述形式:

$$\Delta(g, s) = \Delta_1(g, s)\Delta_2(g, s)\cdots\Delta_l(g, s) \qquad (3.3.2)$$

其中因子 $\{\Delta_i(g, s); i = 1, \cdots, l\}$ 是 g 的多项式,并且在 s 的有理函数域上不可约. 设不可约因子 $\Delta_i(g, s)$ 具有如下形式:

$$\Delta_i(g, s) = g_i^{t_i} + a_{i_1}(s)g_i^{t_i-1} + \cdots + a_{it_i}(s) = 0 \quad (3.3.3)$$

其中 t_i 是第 i 个不可约因子的次数,而系数 $\{a_{ij}(s); i=1,\cdots, l;\ j = 1, 2, \cdots, t_i\}$ 是 s 的有理函数. 若 $b_{i_0}(s)$ 是系数 $\{a_{ij}(s); j = 1, 2, \cdots, t_i\}$ 的最小公分母, 则方程 (3.3.3) 可写成

$$b_{i_0}(s)g_i^{t_i} + b_{i_1}(s)g_i^{t_i-1} + \cdots + b_{it_i}(s) = 0;\ i = 1, \cdots, l \qquad (3.3.4)$$

其中系数 $\{b_{ij}(s); i = 1, 2, \cdots, l; j = 1, 2, \cdots, t_i\}$ 均为 s 的多项式. 由式(3.3.4)定义的复变函数 $g_i(s)$ 称为代数函数 [1; 附录 1]. 于是与开环增益矩阵 $G(s)$ 相联系的是代数函数集合 $\{g_i(s);\ i = 1, 2, \cdots, l\}$, 它直接与 $G(s)$ 的特征值相联系. $G(s)$ 的特征增益函数就用代数函数 $\{g_i(s);\ i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的集合来定义.

寻求 $\{\Delta_i(g, s); i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的不可约因子并由此而定义特征增益函数的问题与 $G(s)$ 的某种合适的正则型紧密相关. 若 $\Delta(g, s)$ 可以化简成 g 的线性因子,则 $G(s)$ 可以化成 Jordan 型 [3], 一般讲这并不常见,合适的正则型如下:

令

$$C(\Delta_i) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{it_i}(s) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{it_i-1}(s) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{it_i-2}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{i_1}(s) \end{bmatrix}, \quad t_i > 1 \qquad (3.3.5)$$

与

$$C(\Delta_i) \triangleq -a_{i_1}(s), \quad t_i = 1 \qquad (3.3.6)$$

则存在变换矩阵 $E(s)$ 使

$$G(s) = E(s)Q(s)E(s)^{-1} \qquad (3.3.7)$$

其中 $Q(s)$ 是唯一的对角块矩阵，它称为 $G(s)$ 的不可约有理正则型并由下式

$$Q(s) \triangleq \mathrm{diag}[C(\Delta_1), C(\Delta_2), \cdots, C(\Delta_l)] \qquad (3.3.8)$$

给出. 很清楚在给出了 $Q(s)$ 以后不可约因子 $\Delta_i(g, s)$ 就容易得到，而对任意给出的 $G(s)$，如何寻求 $Q(s)$ 的办法将在附录 2 中给出.

3.3-1 特征增益函数的零、极点

研究定义特征增益函数 $g(s)$ 的方程

$$\Phi(g, s) \triangleq b_0(s)g^t + b_1(s)g^{t-1} + \cdots + b_t(s) = 0 \qquad (3.3.9)$$

以下将设

$$b_0(s) \not\equiv 0 \quad 与 \quad b_t(s) \not\equiv 0$$

这是由于若这两个多项式系数之一成为零，我们就可得到一个首项与零次幂系数均不为零的简化形式，于是这一降了阶的方程又可定义一个代数函数，而对这个方程说来前述对系数的假定则是满足的.

可能发生 b_0 与 b_t 具有公因子的情形，这样在某个 s 的集合上这二者将同时消失. 在考查这个影响之前，先设 b_0 与 b_t

不具有公因子．当

$$b_t(s)=0 \tag{3.3.10}$$

时代数函数将显然为零，而当

$$b_0(s)\to 0 \tag{3.3.11}$$

时代数函数将变至无穷．由此就定义了满足式(3.3.10)的 s 值为代数函数 $g(s)$ 的零点，而将满足

$$b_0(s)=0 \tag{3.3.12}$$

的 s 的值定义为代数函数 $g(s)$ 的极点．除特别声明，术语“零点、极点”一般均指为有限的，而对 $s=\infty$ 将另给特别注意，这将在本小节结束时再谈．

为了能使方程(3.3.10)与(3.3.12)在 $b_0(s)$ 与 $b_t(s)$ 具有公因子时同样可以用来定义 $g(s)$ 的零点与极点，我们就必须说明其合理性．首先来处理一个显然的情况，即当所有 $\{b_i(s); i=0,1,\cdots,t\}$ 含有一个公因子时，这一公因子可以从方程中简单地约去而留下一个为一适当代数函数所满足的方程．然而若 $b_0(s)$ 与 $b_t(s)$ 有这种公因子而系数的一个非空集 $\{b_u(s), b_{u+1}(s), \cdots, b_v(s)\}$ 没有这样的公因子，那么对式(3.3.9)左端以 $b_0(s)$ 除之，则有

$$g^t+\frac{b_1(s)}{b_0(s)}g^{t-1}+\cdots+\frac{b_u(s)}{b_0(s)}g^{t-u}+\cdots$$

$$+\frac{b_v(s)}{b_0(s)}g^{t-v}+\cdots+\frac{b_t(s)}{b_0(s)}=0 \tag{3.3.13}$$

若 $\bar{s}$ 是 $b_0(s)$ 与 $b_t(s)$ 的公因子的零点，则当 $s\to\bar{s}$ 时，系数集 $\left\{\frac{b_u(s)}{b_0(s)},\cdots,\frac{b_v(s)}{b_0(s)}\right\}$ 的模将成为任意大，显然 $s=\bar{s}$ 将是 $g(s)$ 的一个极点．

又设 b_0 与 b_t 具有公因子而系数的某个非空集 $\{b_j(s),\cdots, b_m(s)\}$ 不具有这种因子，则当 $s\to\bar{s}$ 时代数方程(3.3.9)就可

用下式代替:

$$b_i(\bar{s})g^{t-i}(\bar{s}) + \cdots + b_m(\bar{s})g^{t-m}(\bar{s}) = 0 \qquad (3.3.14)$$

其中 $\bar{s}$ 是上述公因子的零点，且 $b_i(\bar{s}) \neq 0, \cdots, b_m(\bar{s}) \neq 0$. 因此就必有

$$g(\bar{s}) = 0$$

这表明 $\bar{s}$ 确实是代数函数的一个零点.

由此我们可以断言方程(3.3.10)与(3.3.12)是可以用来定义代数函数 $g(s)$ 的有限零点与有限极点的. 并且这一定义也能使我们处理零点与极点相重合的情形. $g(s)$ 的极点与零点多项式分别以 $p_g(s)$ 与 $z_g(s)$ 表示,并定义为

$$p_g(s) \triangleq b_0'(s)$$

与

$$z_g(s) \triangleq b_t'(s) \qquad (3.3.15)$$

其中 b_0' 与 b_t' 是由 b_0 与 b_t 用各自首项系数除后所得的首一多项式.

从考虑在 $s = \infty$ 处 $g(s)$ 的目的出发,设

$$s = z^{-1} \qquad (3.3.16)$$

则有

$$\Phi(g, s) = \Phi(g, z^{-1}) = z^{-q}\Psi(g, z) \qquad (3.3.17)$$

其中 q 是 $g(s)$ 的有限极点数. 在 $z = 0$ 的任一邻域内(点 $z = 0$ 不包括在内)方程 $\Phi(g,s) = 0$ 等价于方程 $\Psi(g,z) = 0$, 因而若考虑方程

$$\Psi(g, z) \triangleq c_0(z)g^t + c_1(z)g^{t-1} + \cdots + c_t(z) = 0 \qquad (3.3.18)$$

则可推知

(i) $s = \infty$ 是特征增益函数 $g(s)$的极点,当且仅当 $c_0(0) = 0$;

(ii) $s = \infty$ 是特征增益函数 $g(s)$ 的零点，当且仅当

$c_i(0) = 0$.

对这里正在考虑的描述一物理可实现系统的开环增益矩阵说来，按定义（参见第 2.1 节）$g(s)$ 将不可能有无穷远的极点，事实上容易看出 $s=\infty$ 的特征增益函数 $g(s)$ 的值就是 D 的特征值.

3.3-2 传递函数矩阵极点和零点的代数定义

设 $T(s)$ 为一复变量 s 的 $m \times l$ 有理函数矩阵，则有一 $T(s)$ 的正则型(即 Smith-McMillan 型) $M(s)$，使

$$T(s) = H(s)M(s)J(s) \tag{3.3.19}$$

其中 $m \times m$ 矩阵 $H(s)$ 与 $l \times l$ 矩阵 $J(s)$ 均为单模态矩阵(其行列式为与 s 无关的非零常数). 若 $T(s)$ 的秩为 r（即对几乎所有的 s, $T(s)$ 的秩为 r），则 $M(s)$ 具有如下形式:

$$M(s) = \begin{bmatrix} M^*(s)_{rr} & 0_{r\ l-r} \\ 0_{m-r\ r} & 0_{m-r\ l-r} \end{bmatrix} \tag{3.3.20}$$

其中

$$M^*(s) = \mathrm{diag}\left\{\frac{\varepsilon_1(s)}{\phi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\phi_2(s)}, \cdots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\phi_r(s)}\right\} \tag{3.3.21}$$

并且

(i) 每个 $\varepsilon_i(s)$ 可整除一切 $\varepsilon_{i+j}(s)$;

(ii) 每个 $\phi_i(s)$ 可整除一切 $\phi_{i-j}(s)$.

用适当的 $H(s)$, $M(s)$, $J(s)$ 的分块写法,可有

$$T(s) = [H_1(s)\ H_2(s)] \begin{bmatrix} M^*(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= H_1(s)M^*(s)J_1(s) \tag{3.3.22}$$

其中 $M^*(s)$ 满足方程 (3.3.21). 由此 $T(s)$ 可表示为

$$T(s) = H_1(s)\left[\mathrm{diag}\left(\frac{\varepsilon_i(s)}{\phi_i(s)}\right)\right]J_1(s)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h_i(s) \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} j_i^T(s) \qquad (3.3.23)$$

其中

(i) $\{h_i(s);\ i = 1, 2, \cdots, r\}$ 是矩阵 $H_1(s)$ 的列;

(ii) $\{j_i^T(s);\ i = 1, 2, \cdots, r\}$ 是矩阵 $J_1(s)$ 的行.

我们知道

$$r \leqslant \min(l, m)$$

且 $H(s)$, $J(s)$是对一切 s 均具满秩 m 与 l 的单模态矩阵. 如果 $T(s)$ 是对具输入变换向量 $\hat{u}(s)$ 与输出变换向量 $\hat{y}(s)$ 的系统所对应的传递函数矩阵,则任何输入向量 $\hat{u}(s)$ 均可用

$$\hat{y}(s) = \sum_{i=1}^{r} h_i(s) \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} [j_i^T(s)\hat{u}(s)] \qquad (3.3.24)$$

转换成一输出向量 $\hat{y}(s)$. 对单输入单输出情形有

$$\hat{y}(s) = \frac{k\varepsilon(s)}{\psi(s)} \hat{u}(s)$$

其中 k 为常数,传递函数为

$$g(s) = \frac{k\varepsilon(s)}{\psi(s)}$$

其零点是使 $\varepsilon(s)$ 为零的 s 值而其极点是使 $\psi(s)$ 为零的 s 值. 由此对于非零的 $\hat{u}(s)$ 说来当 s 是 $g(s)$ 的零点时对应 $\hat{y}(s)$ 的模为零, 而当 s 是 $g(s)$ 的极点时对应 $\hat{y}(s)$ 的模为任意大. 因此刻划 $T(s)$ 的零点与极点的一个自然途径是采用 s 的那些值,对这些值, 非零的 $\|\hat{u}(s)\|$ 可有对应的 $\|\hat{y}(s)\|$ 为零, 或者对有限的 $\|\hat{u}(s)\|$ 对应 $\|\hat{y}(s)\|$ 为无穷大, 其中 $\|\cdot\|$ 表示标准向量范数. 这种标量情形下的自然扩展可直接引出 $T(s)$ 的极点与零点的定义,即用 Smith-McMillan 型中项

$$\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}.$$

所作的定义，这也是下述两结果成立的原因.

零点引理 对 $\|\hat{u}(s)\| \neq 0$ 且 s 有限，$\|\hat{y}(s)\|$ 为零，当且仅当某个 $\varepsilon_i(s)=0$.

极点引理 对 $\|\hat{u}(s)\|<\infty$，$\|\hat{y}(s)\|\to\infty$，当且仅当某个 $\phi_i(s)\to 0$.

由这些考虑自然地可以引出下述定义[3].

$T(s)$ 的极点 $T(s)$ 的极点系多项式集合$\{\phi_i(s);\ i=1,2,\cdots,r\}$ 的全部零点的集合. 以下记 $T(s)$ 的极点为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，令

$$p_T(s)=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n) \tag{3.3.25}$$

并称它为 $T(s)$ 的极点多项式，且有

$$p_T(s)=\prod_{i=1}^{r}\phi_i(s) \tag{3.3.26}$$

$T(s)$ 的零点 多项式 $\{\varepsilon_i(s);\ i=1,2,\cdots,r\}$ 集的全部零点均称为 $T(s)$ 的零点. 以下用 $\{z_1,\cdots,z_\omega\}$ 表示 $T(s)$ 的零点，令

$$z_T(s)=(s-z_1)\cdots(s-z_\omega) \tag{3.3.27}$$

并称其为 $T(s)$ 的零点多项式，且有

$$z_T(s)=\prod_{i=1}^{r}\varepsilon_i(s) \tag{3.3.28}$$

重要的是应指出 $z_T(s)$ 与 $p_T(s)$ 未必一定互质，因而简单地用 $\det T(s)$ 的分母与分子的零点来定义 $T(s)$ 的极点与零点是不恰当的.

计算极点多项式与零点多项式的法则

应用 Smith-McMillan 型的办法来确定 $T(s)$ 的极点与零点并非总是方便的，特别在手算时. 下述法则能给出与用 Smith-McMillan 型定义同样的结果.

极点多项式法则 $p_T(s)$ 是 $T(s)$ 的所有阶的所有非零

子式的最小首一公分母.

零点多项式法则 $z_T(s)$ 是 $T(s)$ 的所有 r 阶（r 是 $T(s)$ 的秩）子式的分子的最大首一公因式. 这些子式全都正好有 $p_T(s)$ 作为公分母.

3.3-3 开环增益矩阵 $G(s)$ 代数定义的极点-零点与对应特征增益函数集合的极点-零点间的关系

在广义 Nyquist 稳定性判据的确立过程中，作为至关重要的一步是建立代数意义上的极点、零点与复变理论的联系，即建立与对应特征增益函数集的极点零点的联系.

在展式

$$\det[gI_m - G(s)] = g^m + a_1(s)g^{m-1} + \cdots + a_m(s) \tag{3.3.29}$$

中,系数 $a_1(s)$ 由熟知的公式

$$\det[gI_m - G(s)] = g^m - [\operatorname{tr} G(s)]g^{m-1} + [\sum G(s)\text{ 的 2 阶主子式}]\, g^{m-2} - \cdots + (-1)^m \det G(s) \tag{3.3.30}$$

推知应均为 $G(s)$ 的子式的适当的和，因此极点多项式 $b_0'(s)$ 是首一多项式,它可以由 $G(s)$ 的所有阶全部非零**主**子式的最小公分母得到.

现在一方阵 $G(s)$ 的极点多项式 $p_G(s)$ 是首一多项式，它可以由 $G(s)$ 的所有阶的所有非零子式的最小公分母得到. 因此，若 $e_G(s)$ 是由所有非零**非主**子式的最小公分母得到的首一多项式且已消去全部与 $b_0'(s)$ 公共的因子,则可有

$$p_G(s) = e_G(s)b_0'(s) \tag{3.3.31}$$

进而由于

$$\det G(s) = a_m(s) = \frac{b_m(s)}{b_0(s)} \tag{3.3.32}$$

又由 $G(s)$ 的 Smith-McMillan 型有

$$\det G(s) = \alpha \frac{z_G(s)}{p_G(s)} \tag{3.3.33}$$

其中 α 为与 s 无关的标量，于是我们必然得到

$$z_G(s) = e_G(s) b'_m(s) \tag{3.3.34}$$

在不少场合 $G(s)$ 的非零非主子式的最小公分母可除尽 $b_0(s)$，此时 $e_G(s)$ 将为 1，因此 $G(s)$ 的极点与零点多项式相应地就是 $b'_0(s)$ 与 $b'_m(s)$。一般讲一个复变量方阵函数 $G(s)$ 将会有一个由 l 个不可约且满足方程(3.3.3)的特征增益函数形成的集合，因而其极点与零点多项式的一般形式可以写成

$$p_G(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} b'_{i0}(s) \tag{3.3.35}$$

与

$$z_G(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} b'_{i,t_i}(s) \tag{3.3.36}$$

其中第 i 个特征增益函数的极点与零点多项式对应为 $b'_{i0}(s)$ 与 $b'_{i,t_i}(s)$。

阐明极点-零点关系的例子

令

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} \times \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{-1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

对 $G(s)$ 说来极点多项式显然是

$$p_G(s) = (s+1)(s+2)(s-1)$$

而对应零点多项式是

$$z_G(s) = (s-1)$$

$G(s)$ 的特征方程是

$$\det[gI - G(s)] = \left(g - \frac{1}{s+1}\right)\left(g - \frac{1}{s+2}\right) = 0$$

因而不可约特征方程是

$$\Delta_1(g, s) = g - \frac{1}{s+1} = 0$$

与

$$\Delta_2(g, s) = g - \frac{1}{s+2} = 0$$

它们可改写成

$$(s+1)g - 1 = 0$$

与

$$(s+2)g - 1 = 0$$

因而对特征增益函数 $g_1(s)$ 与 $g_2(s)$ 说来极点与零点多项式就是

$$p_{G_1}(s) = b_{10}(s) = (s+1),\ z_{g_1}(s) = \frac{b_{11}(s)}{-1} = 1$$

$$p_{G_2}(s) = b_{20}(s) = (s+2),\ z_{g_2}(s) = \frac{b_{21}(s)}{-1} = 1$$

现在由 $G(s)$ 的非零非主子式的最小公分母得到的首一多项式中消去其与 $b_0'(s)(=b_{10}'(s)b_{20}'(s))$ 的全部公因子，则有

$$e_G(s) = s - 1$$

它满足关系

$$p_G(s) = e_G(s)\prod_{i=1}^{2} b'_{i_0}(s)$$

与

$$z_G(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} b'_{i_1}(s)$$

3.3-4 特征增益函数的 Riemann 曲面

特征增益函数 $g(s)$ 是用一个不可约方程

$$b_0(s)g^t + b_1(s)g^{t-1} + \cdots + b_t(s) = 0 \qquad (3.3.37)$$

定义的，一般讲它有 t 个不同的有限根，例外的情况仅当：

(i) $b_0(s) = 0$，由于方程的次数降低，当 $b_0(s) \to 0$ 时有一个或几个根将趋于无穷大．或

(ii) 方程具有重根．

这后一种情形可在有限的 s 时出现，当且仅当判别式的表达式为零．判别式是方程系数的整有理函数，记为 $D_g(s)$，在附录 3 上对其进行了讨论．

特征增益函数的正常点

特征增益函数的正常点[1;6]系指复平面上任一使 $b_0(s) \neq 0$ 与 $D_g(s) \neq 0$ 的有限点．

特征增益函数的临界点

$g(s)$ 的临界点[1;6]系指复平面上任一使

$$b_0(s) = 0 \text{ 或 } D_g(s) = 0$$

成立的点以及点 $s = \infty$．

特征函数的分支点

$$D_g(s) = 0$$

的解称为特征增益函数的有限分支点，无穷远点成为分支点是指式(3.3.18)的判别式 $\overline{D}_g(z)$ 有 $\overline{D}_g(0) = 0$．

在每个正常点由于判别式非零，确定特征增益函数的方程（3.3.7）将具 t 个不同的根．代数函数理论指出在复平面上单连通区域内除了临界点以外，特征增益函数 $g(s)$ 的取值是一解析函数集合．其中的每一个函数均称为特征增益函数 $g(s)$ 的分支．基于标准的解析开拓方法联系到代数方程的性质，可以指出这些不同的分支刚好组成代数函数 $g(s)$ 的一个整体．这可归结在关于代数函数的这一基本定理之中：一个不可约代数方程（3.3.37）准确地在带孔的平面上确定一个 t 值函数[7].

用这样的方法定义的函数称为代数函数，这可以作为熟知的复变初等函数的一种自然推广．一个复变的初等函数有其定义域与值域两复数集合 $\boldsymbol{C}$．一个代数函数其值域为一复数集合 $\boldsymbol{C}$，但其定义域 $\boldsymbol{R}$ 则是 Riemann 曲面．由于代数函数的 Riemann 曲面在这一工作中起着关键的作用，因此重要的是要在其定义与公式之外对其思想有个直观的理解.

设对代数函数的一分支有一幂级数表达式，这样一个表达式常称为一个函数单元．我们可以想象把这个幂级数的收敛圆从纸上割下来，纸盘上的个体点构成了该单元唯一函数值的承受域，现将这个初始的函数单元用第二个幂级数作解析开拓，于是可以想象另一个收敛圆被割了下来且部分地与第一个粘在一起，如图 6 所示．这个粘成一块的部分又构成了唯一函数值的承受域且作为一个值单叶的区域．若再进一步作解析开拓，则又可将一个新的盘子粘到原有的上面去．重复作这样的解析开拓，就会出现一个盘子搭上了另一个但并不是用解析开拓直接联系的那一个，如图 7 所示．这样交迭的盘子与另一个交迭的盘子粘在一起，当且仅当它们是同一函数值的承受域；但是，若它们是不同函数值的承受域，则就认为它们之间没有粘在一起，而认为它们是两片承受着不同

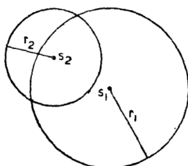


图6 解析开拓

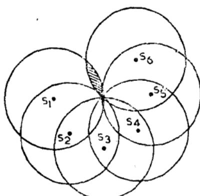


图7 重复解析开拓

的函数值，而且在复平面的这一部分是重迭地放着.

将上面这一过程继续做下去，一个想象的覆盖 t 页的曲面就形成了，其中 t 是代数函数的次数. 在 Riemann 曲面的形成中，这些页可用各种方法互相连通，这也包括这样两页的连接，即它们彼此被很多页分开着. 虽然这样一种结构并不能在三维空间中进行下去，但给出一个所要求过程的合适的拓朴描述是并不困难的. 这样一个想象的曲面就称为多值代数函数的 Riemann 曲面，在 Riemann 曲面上代数函数值的整体完全是按单值意义铺展开的. 在包括复平面在内的这 t 页的每一页上，每一点是也仅是一个函数值的承受点.

在附录4上给出了一个构造 Riemann 曲面的方法，这包括在复平面上运用割口的方法，它对于说明问题可能有帮助. 令代数函数 $g(s)$ 有 r 个临界点 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，设用线 $\boldsymbol{L}$ 将它们互相连接然后再连至无穷远点. 这样我们在割过的复平面 $\boldsymbol{C}$-$\boldsymbol{L}$ 上定义了 t 个不同的解析函数 $\{g_1(s), g_2(s), \cdots, g_t(s)\}$，这些函数中每一个均可用标准的解析开拓办法穿过割口. 由解析开拓的基本原理可知，若一解析函数在其定义域的一部分满足一代数方程，则它必然在其解析开拓的每一区域内满足这一方程. 因此就一定有

(i) 仅有 t 个不同的解析函数在割过的平面 $\boldsymbol{C}$-$\boldsymbol{L}$ 上满足确定的代数方程.

(ii) 这些解析函数 $\{g_i(s): i=1, 2, \cdots, t\}$ 的任一个经解析开拓给出一个解析函数,它同样满足确定的代数方程.由此可知联系割口 $\boldsymbol{L}$ 一边的解析函数的集合必然是联系割口另一边的解析函数集的一个置换. 因此在割口 $\boldsymbol{L}$ 两边的解析函数上(用其计算值集合)利用适当的比较方法,就可以产生出一个合适的定义域,在其上可以确定一个单值的解析函数,它将这个定义域连续单值地映射到复平面上. 显然这个函数就是代数函数它已被看作是一个单一整体,而上述构成的定义域就是 Riemann 曲面.

对于读者说来,知道对任一给定的代数函数均能将其 Riemann 曲面构造出来,在其上函数的值形成一位置的单值函数,这对于了解本书已是充分的了. 运用 Riemann 曲面的概念解析函数理论中不少标准的关系与性质可以推广至代数函数的情形,特别是在 Riemann 曲面上辐角原理也成立,附录 5 给出了辐角原理的推广.

作为特征增益函数定义域的 Riemann 曲面称为**频率曲面**或 **s 曲面**. 当开环增益矩阵 $G(s)$ 是 $m \times m$,且其对应的特征方程不可约(通常实际中常见的情形)时,频率曲面由 m 页频率平面或 s 平面所组成.

3.3-5 广义根轨迹图

特征增益函数 $g(s)$ 是复变函数,其极点与零点均位于频率曲面定义域上. 在频率曲面上用画出 $g(s)$ 的常位相与常辐值的曲线来展示其性质是方便的. 若将附录 4 中勾划的计算方法用来构造曲面,则画出常位相与常辐值的曲线就是一个简单的过程. 频率曲面能够想象成是具有复增益参数 g 的

所有可能值的所有可能的闭环特征频率的集合．一旦曲面已用常位相与常辐值曲线勾划好，我们就有了在闭环特征频率与开环增益间的一个直接对应，而由于曲面是由 m 页复频率平面构成，于是对每个 s 值将有 m 个对应的特征增益．

由方程(3.1.4)有

$$g(s) = -\frac{1}{k} \tag{3.3.38}$$

所以随着实控制变量 k 的变化闭环极点（特征频率）勾划出一个图形，该图形等价于 $g(s)$ 的 $180°$ 等位相曲线*)．方程(3.3.38)是对确定单回路根轨迹方程的直接推广．$g(s)$的 $180°$ 位相图是一个多变量根图，即闭环极点随增益控制变量 k 变化的图．多变量根图画在 Riemann 曲面上这一事实与单输入单输出的情况比较表明其复杂化了的特性，而后者的根图是画在简单的复平面上的(即单页的 Riemann 曲面)．多变量根图有时也称特征频率图或多变量根轨迹．

在第 3.2 节就已指出一般对 $G(s)$ 与 $S(g)$ 而言特征方程将有所不同，对 $S(g)$ 的方程来讲可能包含某些与 g 无关的 s 的因子，因而这些因子对应闭环极点也独立于 g 或等价地独立于 k．从根图的观点这些是孤立点对应退化根图，退化根图不能通过用频率曲面上 $g(s)$ 的 $180°$ 等位相图求得．实际上特征频率轨线是作为一个轨线集合在单页复平面上产生出来的，即用 g 在增益平面沿负实轴变化时对应 $S(g)$ 的特征值描出，这一方法将自动挑出退化的轨迹．与经典 Evans 根图方法的共同点是特征频率轨线常用增益控制变量 $k = -g^{-1}$ 来作图．

---

*) 这儿指 k 为正实数．——译者注

3.3-6 频率曲面与特征频率轨线的例子

作为一个例子，考虑图 3 所示的一般多变量反馈结构，其开环传递函数为(增益矩阵)

$$G(s)=\frac{1}{(1.25)(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

矩阵为 2 阶因而合适的曲面可视为由两页复 s 平面构成. 图 8,9 上画出了在两页上 $g(s)$ 取常位相与常辐值的曲线，可辨识不连续性的割口在图上用黑粗线画出，而特征频率轨线，则是 $g(s)$ 的 180° 等位相的曲线，它是用方块符号标出的. 特征频率轨迹指出增益控制参数从零开始上升引起系统从经验稳定、不稳定到又重新稳定. 这一现象与在右半平面存在一

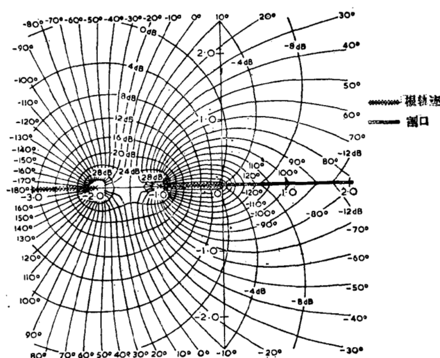


图 8　第 1 页的频率曲面

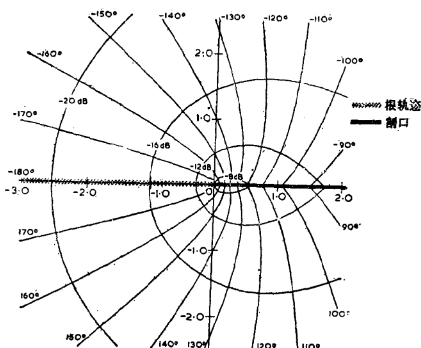


图 9　第 2 页的频率曲面

个支点$\left(在 s=\frac{1}{24}\right)$的情况十分吻合.

注意,由于我们用开环增益矩阵来刻划整个反馈结构,因而就不考虑任何不可观测与不可控的成分.

3.4　特征频率函数

确定特征频率函数 $s(g)$ 的自然途径是利用特征方程

$$\nabla(s, g) \triangleq \det\left[sI_n - S(g)\right] = 0 \qquad (3.4.1)$$

它是一个代数函数，在前一节详细讨论特征增益函数的办法可以直接应用于此而只需将 s 与 g 互换一下.

作为特征频率函数的定义域的 Riemann 曲面称为增益曲面或 g 曲面,它由 n 页复增益平面或 g 平面组成,这是由于对

每个给定的 g 值闭环特征频率有 n 个值（闭环极点）. 增益曲面可以看成是与所有闭环特征频率相联系的开环增益矩阵 $G(s)$ 的所有可能的开环特征增益. 用类似于增益函数 $g(s)$ 的做法合适的是在增益平面上，用在曲面上画出 $s(g)$ 的常位相与常辐值的曲线的办法来展现 $s(g)$在增益曲面上的性质. 同$g(s)$ 一样 $s(g)$ 也具有极点与零点但其作用却是很不同的.

3.4-1 广义 Nyquist 图

增益曲面的每一页上均用 $s(g)$的常位相与常辐值曲线勾画好后，就可分成对应左半平面与右半平面闭环特征频率的区域. 因而给定这样一个描画好的曲面后，一眼就可看出 g（或等价地 k）的那些值对应稳定的闭环极点. 很清楚稳定与

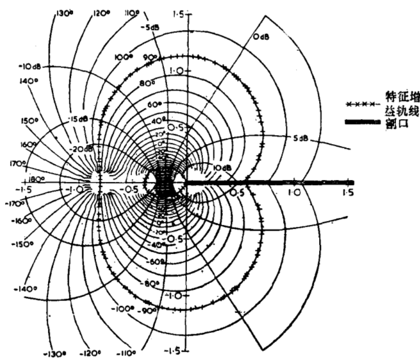


图 10 第 1 页的增益曲面

不稳定区域间的边界就是 $s(g)$ 的 $\pm 90°$ 等位相线. $s(g)$ 的 $\pm 90°$ 等位相线是单环 Nyquist 图的自然推广，称为**特征增益轨线.**

实际上特征增益轨线是在复增益平面上用 $G(s)$ 的特

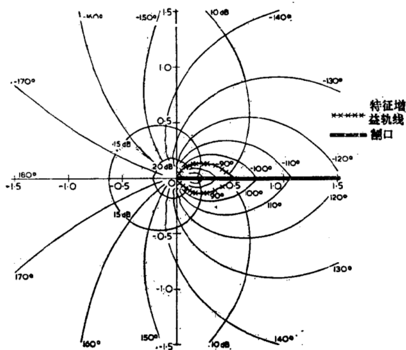


图 11　第 2 页的增益曲面

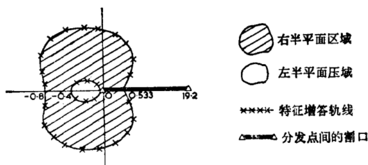


图 12　图 10 的略图，以强调右半与左半平面区域

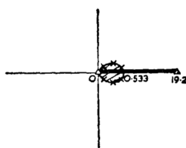


图 13　图 11 的略图，以强调右半与左半平面区域

征值当 s 在 s 平面上走过所谓 Nyquist D 回线时描出的. 如果我们考虑虚轴的一部分，则我们可以算出对应特征值 $\bar{g}_1(j\omega), \cdots, \bar{g}_m(j\omega)$ 的轨线的集合（在本书中 $j=\sqrt{-1}$），其算法如下:

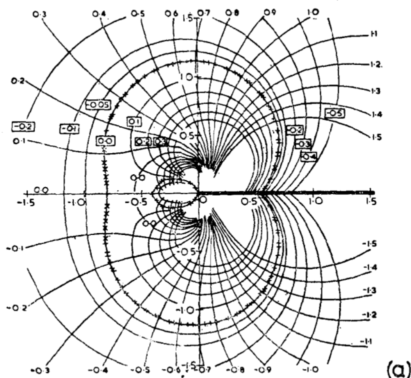


图 14　第 1 页的增益曲面.

(i) 选择一角频率的值，例如 ω_a；

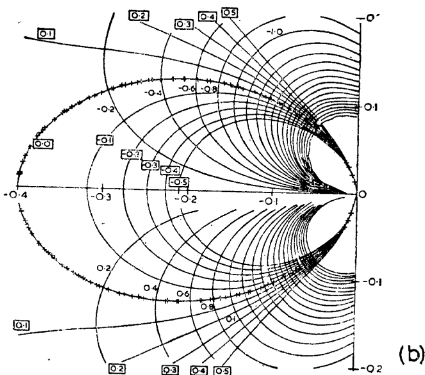
(ii) 计算复数矩阵 $G(j\omega_a)$；

(iii) 运用标准的算法计算 $G(j\omega_a)$ 的特征值，它是一复数集合，表示成 $\{g_i(j\omega_a)\}$；

(iv) 在复平面上标出这些数 $\{g_i(j\omega_a)\}$；

(v) 对角频率的其它的值 ω_b, ω_c, ···重复前述过程，然后用基于特征函数各分支的连续性进行整理的办法将这些标出的点连成曲线。

对于第四章中发展的广义 Nyquist 稳定性判据说来，Nyquist D 回线是用标准的顺时针方向扫过的。



(a) "完全"页；(b)−0.2 附近的小区域

3.4-2 增益曲面与特征增益轨线的例子

作为一个例子考虑第 3.3-5 节中讨论过的开环增益矩阵,它具有下述最小状态空间实现:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0.6\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2.4 & -1.6\\ 4.8 & -4.8\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

系统具有两状态因而合适的增益曲面将由两页复 g 平面构成. 在图 10 与图11 上分别画出了这两页 $s(g)$ 的等位相与等辐值曲线. 特征增益轨线是 $s(g)$ 的 $\pm 90°$ 等位相曲线,在图上用带有"×"的线表示.

图 12 与 13 是图 10 与 11 的略图, 以突出说明闭环极点的右与左半平面区域. 从这一略图上易于看出增益控制参数 k 的稳定性界限. 由于 $g=-k^{-1}$, 当 k 由零沿正方向增加, 则对应 g 的值在每页上就由 $-\infty$ 沿实轴向原点移动. 在第 1 页当 $1.25<k<2.5$ 时对应的 g 在右半平面区域,而在第 2 页,对正值的 k 对应的 g 不会进入右半平面区域, 因此,闭环系统在 $0\leqslant k<1.25$ 与 $2.5<k<\infty$ 时都是稳定的.

若 k 由零沿负向增加, 则 g 的临界值在每一页上均由∞ 沿实轴向原点移动.在这两页上当$-\infty<k\leqslant-1.875$ 时 g 的值位于右半平面. 因此对应正反馈的 k 的负值当 $-1.875<k\leqslant 0$ 时对应闭环系统将是稳定的.

若将有标度的增益曲面投影至复增益平面 $\boldsymbol{C}$ 上, 就得到特征增益轨线正规的一种描述. 加上表示右半与左半平面两区域的曲线图, 稳定性就可以通过考虑右半平面区域与单个临界点 $\left(-\frac{1}{k}+j0\right)$ 间的关系预测出来. 但由于图形重迭的

表示方法难于理解．因此虽然在广义 Nyquist 稳定性判据（第四章）中计算绕数如同 Saeks [10] 指出那样对系统稳定性并不是基本的，但它确实还是提供了一个在增益平面 $\boldsymbol{C}$ 上预测闭环系统稳定性的最简单的方法．

由增益曲面上画好的图可以确定闭环极点，因而去确定闭环系统的相对稳定性是可能的．现在通过对具有单位 k 的前述例子利用寻找优势闭环极点的办法来叙述它．为此具有如图 14 与图 15 所示的具常实部值与常虚部值曲线的增益曲面是合适的．

令优势闭环极点是

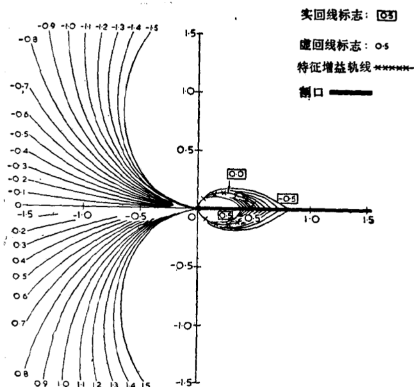


图 15　第 2 页的增益曲面

$$s_d = \alpha \pm j\beta$$

则 α 是通过临界的，-1 与 g 的值中任一个的最小（在模上）负实部回线，而 β 是对应的虚部回线．由图 14 与 15 有

$$\alpha \simeq -0.05 \text{ 与 } \beta = 0$$

由此

$$s_d \simeq -0.05$$

用手算的优势闭环极点是

$$s_d = -0.0528$$

由增益曲面同样可以确定特征频率轨线．除可能的单点轨线外，根轨线是在特征增益轨线具有位相 180° 处的 s 的值．因此由增益曲面上画好的图，根轨线就由常数值回线在每一页上穿过负实轴时的值确定．类似地，从一画好图的频率曲面上，由常数值曲线穿过虚轴时的值确定特征增益轨线也是可能的．

参 考 文 献

[1] G. A. Bliss, "Algebraic Functions", Dover, New York, 1966 (reprint of 1933 original).

[2] P. M. Cohn, "Algebra", vol. 1, Wiley, London 1974.

[3] H. H. Rosenbrock, "State Space and Multivariable Theory", Nelson, London, 1970.

[4] T. Kontakos, Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1973.

[5] S. Barnett, "Matrices in Control Theory", Van Nostrand-Reinhold, London, 1971.

[6] E. Hille, "Analytic Function Theory", Vol. 2, Ginn and Co., U. S. A., 1962.

[7] K. Knopp "Theory of Functions", Part 2, Dover, New York, 1947.

[8] G. Springer, "Introduction to Riemann Surfaces", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[9] B. Kouvaritakis and U. Shaked, "Asymptotic behaviour of root-loci of multivariable systems", Int. J. Control, 23, 297--340, 1977.

[10] R. Saeks, "On the Encirclement Condition and Its Generalization" IEEE Trans. on Circuits and Systems, 22, 780—785, 1975.

第四章　广义 Nyquist 稳定性判据

在线性反馈系统理论中 Nyquist 稳定性判据[1]是一个最基本的结果，它在多变量情况下的推广具有很大的意义，这一推广是由 MacFarlane[2]作为对反馈系统分析与设计的特征轨线法的一部分给出的[3]，而当时并无合适的证明予以支持．广义 Nyquist 稳定性定理的证明是由 Barman 与 Katzenelson 给出的[4,5]，他们的方法忽视了所含量的某些关键的代数性质，且过分地依赖于复平面上的割口，使得这种提法在技术上复杂但却又掩盖了其结果在本质上的简单性．这一章的目的在于给出一个一般反馈结构下广义 Nyquist 式稳定性判据的严谨证明，其基础在于复变理论的基本结果：运用于定义在合适的 Riemann 曲面上的代数函数的辐角原理[附录 5]．

本章提出并证明了两个 Nyquist 式稳定性的判定，每一个的适用性依赖于子系统的表征，判据的两个提法在第 4.1 节中给出而证明在 4.2 节中给出．

4.1　广义 Nyquist 稳定性判据

若图 3 所示的一般反馈结构的子系统均用状态空间表示，则判据的下述提法是可用的．

提法 1　一般反馈结构是闭环稳定，当且仅当：

(i) 特征增益轨线集合绕临界点 $\left(-\frac{1}{k}+j0\right)$ 反时针方向圈数的净和等于 $G(s)$ 在右半平面的极点数；

(ii) 特征增益轨线不经过临界点 $\left(-\frac{1}{k}+j0\right)$;

(iii) 通向无穷远的特征增益轨线的分支数等于 $G(s)$ 在虚轴上的极点数;

(iv) 开环系统 $S(A, B, C, D)$ 的矩阵 A 的对应系统不可控与不可观测模部分的特征值全在左半平面，此时开环系统系指输入即第一个子系统的输入而其输出即第 h 个子系统的输出.

如果子系统完全用传递函数矩阵表示，或已知每个子系统均不存在不可观测与不可控模所对应包括虚轴在内的右半平面的特征值,则可采用下述提法:

提法 2 一般反馈结构是闭环稳定,当且仅当:

(i) 特征增益轨线集合绕临界点 $\left(-\frac{1}{k}+j0\right)$ 反时针方向圈数的净和等于 $G_1(s), G_2(s), \cdots, G_h(s)$ 在右半平面极点数之和;

(ii) 特征增益轨线并不经过临界点 $\left(-\frac{1}{k}+j0\right)$;

(iii) 通向无穷远的特征增益轨线的分支数等于 $G(s)$ 在虚轴上的极点数.

注意，若条件 (ii) 或 (iii) 不成立，则闭环系统有一个或几个极点在虚轴上,因而此时不是输入-输出稳定但平衡位置仍可能是稳定的.

4.2 广义 Nyquist 稳定性判据的证明

在第 2.4 节已经指出，图 4 所示切断点对应的返差算子与开环和闭环特征多项式之间的关系为

$$\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)}=\frac{\text{CLCP}(s)}{\text{OLCP}(s)} \tag{4.2.1}$$

这个基本关系式是基础，广义 Nyquist 稳定性判据的证明就在此基础上给出.

证明的第一阶段是考虑返差矩阵 $F(s)$ 的特征值方程，它是

$$\det [fI_m - F(s)] = 0 \tag{4.2.2}$$

如同 $G(s)$ 的特征方程一样，一般讲它可表示成形式为

$$d_{i0}(s)f_i^{t_i} + d_{i1}(s)f_i^{t_i-1} + \cdots + d_{it_i}(s) = 0$$
$$i = 1, 2, \cdots, l \tag{4.2.3}$$

的不可约代数方程的乘积，由这些方程确定出代数函数 $\{f_i(s): i = 1, 2, \cdots l\}$ 的集合. 因此，如同在第 3.3-3 节那儿关于 $G(s)$ 的极点、零点与特征增益函数的极点、零点间的关系所作的讨论一样，$F(s)$ 的极点和零点多项式与代数函数 $\{f_i(s): i = 1, 2, \cdots l\}$ 的极点和零点多项式之间的关系可表述如下：

$$p_F(s) = e_F(s) \prod_{i=1}^{l} d'_{i0}(s)$$

与 (4.2.4)

$$z_F(s) = e_F(s) \prod_{i=1}^{l} d'_{it_i}(s)$$

由定义一般反馈结构下开环特征多项式为

$$\text{OLCP}(s) \triangleq \det (sI_n - A)$$
$$= \det (sI_{n_1} - A_1) \det (sI_{n_2} - A_2) \cdots \det(sI_{n_h} - A_h) \tag{4.2.5}$$

容易指出[6]有

$$\det [sI_{n_i} - A_i] = p_{G_i}(s) p_{d_i}(s) \tag{4.2.6}$$

其中 $p_{G_i}(s)$ 是传递函数矩阵 $G_i(s)$ 的极点多项式而首一多项式 $p_{d_i}(s)$ 的零点是子系统的那些解耦零点，这些解耦零点联系到 A_i 对应不可控与不可观测模的特征频率（特征值）. 开环特征多项式可以写成

$$\mathrm{OLCP}(s)=p_{G_1}(s)p_{G_2}(s)\cdots p_{G_h}(s)p_{d_1}(s)p_{d_2}(s)\cdots p_{d_h}(s) \tag{4.2.7}$$

对于开环增益矩阵 $G(s)$ 的极点多项式 $p_G(s)$，它与子系统传递函数的极点多项式的关系为

$$p_G(s)p_x(s)=p_{G_1}(s)p_{G_2}(s)\cdots p_{G_h}(s) \tag{4.2.8}$$

其中 $p_x(s)$ 的零点是 $G_1(s)$，$G_2(s)$，…，$G_h(s)$ 的那些极点，它们在形成 $G(s)$ 时就消失了，$p_x(s)$ 的零点实际上是系统 $S(A,B,C,D)$ 不可控不可观测模的子集合，这个系统的输入是第一子系统的输入，而其输出是第 h 个子系统的输出。系统 $S(A,B,C,D)$ 的不可控不可观测模的完全集合是 $p_d(s)$ 的零点集，它是

$$p_d(s)=p_x(s)p_{d_1}(s)\cdots p_{d_h}(s) \tag{4.2.9}$$

于是开环特征多项式可以改写成

$$\mathrm{OLCP}(s)=p_G(s)p_d(s) \tag{4.2.10}$$

或者

$$\mathrm{OLCP}(s)=p_G(s)p_x(s)p_{d_1}(s)\cdots p_{d_h}(s) \tag{4.2.11}$$

若将式(4.2.10)与基本关系式(4.2.1)联系起来，则有

$$\mathrm{CLCP}(s)=p_d(s)p_G(s)\frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} \tag{4.2.12}$$

由 $F(s)$ 的 Smith-McMillan 标准形有

$$\det F(s)=\beta\,\frac{z_F(s)}{p_F(s)} \tag{4.2.13}$$

其中 β 是与 s 无关的标量，由 $F(s)$ 的结构与方程(3.1.2)可清楚地知道首一多项式 $z_F(s)$ 与 $p_F(s)$ 将有相同次数，从而有

$$\det F(\infty)=\beta \tag{4.2.14}$$

这样联合方程(4.2.12—14)，闭环特征多项式可以给出为

$$\mathrm{CLCP}(s)=p_d(s)p_G(s)\,\frac{z_F(s)}{p_F(s)} \tag{4.2.15}$$

若由方程(4.2.4)与(3.3.35)对上式进行替换，则这一表达式可重写成

$$\mathrm{CLCP}(s)=p_d(s)e_G(s)\prod_{i=1}^{l}b'_{i0}(s)\frac{\prod_{i=1}^{l}d'_{it_i}(s)}{\prod_{i=1}^{l}d'_{i0}(s)} \qquad (4.2.16)$$

若对方程(3.1.2)应用特征值移动定理，则可得 $F(s)$ 的特征函数 $\{f_i(s):i=1,2,\cdots,l\}$ 与特征增益函数 $\{g_i(s);\ i=1,2,\cdots,l\}$ 之间的关系为

$$f_i(s)=1+k\ g_i(s);\quad i=1,2,\cdots,l \qquad (4.2.17)$$

因而对这两集合说来对应极点多项式将相等，即有

$$\prod_{i=1}^{l}d'_{i0}(s)=\prod_{i=1}^{l}b'_{i0}(s) \qquad (4.2.18)$$

于是由式(4.2.16)则可得到

$$\mathrm{CLCP}(s)=p_d(s)e_G(s)\prod_{i=1}^{l}d'_{it_i}(s) \qquad (4.2.19)$$

注意多项式 $\prod_{i=1}^{l}d'_{it_i}(s)$ 是依赖于增益控制变量 k 的.

由关系式(4.2.19)可以推知（参见第 2.3 节）闭环系统稳定必要而又充分的条件是

(i) $e_G(s)=0$，仅有左半平面的根；

(ii) $\prod_{i=1}^{l}d'_{it_i}(s)=0$，仅有左半平面的根；

(iii) $p_d(s)=0$，仅有左半平面的根.

证明中的下一步是表明如何用围绕圈数的条件来代替条件 (ii)，而这同经典 Nyquist 判据是类似的.

对联系到返差算子 $F(s)$ 的不可约特征方程的集合说来，有一对应的 Riemann 曲面集合，在其上合适的特征代数函数 $\{f_i(s):i=1,2,\cdots,s\}$ 就是单值的，由这些曲面映射到 f_i 平

面是 1 到 1 的并且是连续的. 如果考虑方程(4.2.3)定义的集合的第 j 个方程,方程的次数为 t_j,因而对应的 Riemann 曲面 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 是由 t_j 页复数 s 平面组成. 现设对 $\boldsymbol{C}$ 的 t_j 页在它们还未粘成 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 之前的每一页上将 Nyquist D 回路画好 如图 16 所示,这样在曲面粘成后, Nyquist 回路就并合组成绕过 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 的右半平面的闭 Jordan 回路的集合,这样就可以将扩展了的辐角原理运用到 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 的每个右半平面之上. 因此,对一特定的、未必单连通的、但边界系由 Nyquist D 曲线组成的右半平面区域,代数函数 $f_j(s)$ 在该区域内的零点与极点数之差就等于该区域的边界曲线在映射 $f_j(s)$下,其象在 $\boldsymbol{C}$ (复 f_j 平面)上对原点的顺时针绕数. 由此, 若考虑 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 上的全部右半平面区域,再将扩展了的辐角原理运用于这些区域,则有

$$N(f_j, 0) = Z_{f_j} - P_{f_j} \tag{4.2.20}$$

其中

(i) $N(f_j, 0)$ 是在 $\boldsymbol{C}$ 上用象曲线集合对原点的顺时针绕数的净和,这些象曲线是映射 $f_j(s)$ 对粘合成的 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 上的曲线集的象,该曲线集是在 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 未粘好时先画出而后随 $\boldsymbol{R}_{f_j}$ 粘成而形成的.

(ii) Z_{f_j} 是 $f_j(s)$ 在右半平面的零点数.

(iii) P_{f_j} 是 $f_j(s)$ 在右半平面的极点数.

注意,在 D 回线上的凹缺,仅从扩展的辐角原理的发展理论的观点看是必要的,而在实际上 D 回线可以直接取作虚轴.

闭环稳定性的条件 (ii) 等价于

$$\{f_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\} \tag{4.2.21}$$

在右半平面或在虚轴上没有零点,从而可以用

$$Z_{f_j} = 0;\ j = 1, 2, \cdots, l$$

或 (4.2.22)

$$N(f_j, 0) = -P_{f_j};\ j = 1, 2, \cdots, l$$

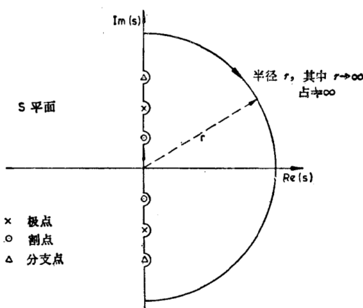


图 16 理论的 Nyquist D 曲线

加上代数函数式(4.2.21)在虚轴上没有零点的条件．由条件式(4.2.22)可推出

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i,\ 0) = -\sum_{i=1}^{l} P_{f_i} \tag{4.2.23}$$

同时式(4.2.22)也可由式(4.2.23)推出，由此闭环系统稳定性的必要充分条件可以改写成

(i′) $e_G(s)=0$，没有右半平面的根；

(ii′) $e_G(s)=0$，在虚轴上没有根；

(iii′) $\sum_{i=1}^{l} N(f_i,\ 0) = -\sum_{i=1}^{l} P_{f_i}$；

(iv′) $\{f_i(s);\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$ 在虚轴上没有零点；

(v′) $p_d(s)$ 仅有左半平面的零点．

现在，正如方程(3.3.35)与(4.2.18)所显示的，$e_G(s)$ 连同特征函数集的极点多项式一起组成了 $G(s)$ 的极点多项式，这

使得我们去考虑组合条件(i')与(iii')为一单个的特征值条件:

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) = -P_G \tag{4.2.24}$$

其中 P_G 是 $G(s)$ 在右半平面的极点数. 对于闭环系统稳定性在条件 (ii'), (iv') 与 (v') 已成立的条件下, 式 (4.2.24) 的充分必要性可证明如下:

由方程(3.3.35)与(4.2.18)可以有

$$P_G = e + \sum_{i=1}^{l} P_{f_i} \tag{4.2.25}$$

其中 e 为 $e_G(s)$ 在右半平面的零点数,同样可有

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} Z_{f_i} - \sum_{i=1}^{l} P_{f_i} \tag{4.2.26}$$

联合这两个表达式,则有

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} Z_{f_i} + e - P_G \tag{4.2.27}$$

其中 $\sum_{i=1}^{l} Z_{f_i}$, e 和 P_G 均为正整数或零.

为确立式(4.2.24)的必要性,设

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) \neq -P_G$$

因而由式(4.2.27)就可推得

$$\sum_{i=1}^{l} Z_{f_i} \neq 0 \text{ 或 } e \neq 0$$

这就断定了条件(4.2.24)对闭环稳定是必要的,

对于充分性,设

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) = -P_G$$

则由方程(4.2.27)就必有

$$\sum_{i=1}^{l} Z_{f_i} = e = 0$$

因而闭环系统是稳定的，即条件(4.2.24)的充分性成立.

因此现在我们可以指出对于闭环系统的稳定性下述条件是充分必要的:

(i″) $\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) = -P_G$;

(ii″) $\{f_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$ 在虚轴没有零点;

(iii″) $e_G(s)$ 在虚轴上没有零点;

(iv″) $p_d(s)$仅有左半平面零点.

由方程 (4.2.17) 可知, Nyquist D 回线在映射 $f_i(s)$ 与 $kg_i(s)$下, **C** 上的象曲线集间以单位移动互相联系，于是稳定性条件 (i″) 可代替为

$$\sum_{i=1}^{l} N(kg_i, -1) = -P_G \tag{4.2.28}$$

其中 $N(kg_i, -1)$ 是在 **C** 上用 k 倍后的特征增益轨线绕点 $(-1 + j0)$ 的顺时针绕数的净和，如同在经典 Nyquist 判据时一样，k 倍可以用计算特征增益轨线绕临界点 $\left(-\frac{1}{k}+j0\right)$ 的绕数加以避开，即用

$$\sum_{i=1}^{l} N\left(g_i, -\frac{1}{k}\right) = -P_G \tag{4.2.29}$$

来代替条件(4.2.28).

由方程(4.2.17)同样可知条件 (ii″) 等价于

$$g_i(j\omega) \neq -\frac{1}{k}; i = 1, 2, \cdots, l \tag{4.2.30}$$

实际上这个对应特征增益轨线不通过临界点 $\left(-\frac{1}{k} + j0\right)$.

条件 (iii″) 也能用一个比较实际的条件来代替.

由方程(3.3.35)，$G(s)$ 的极点多项式给定为

$$p_G(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} b'_{i0}(s) \qquad (4.2.31)$$

其中 $b'_{i0}(s)$ 是第 i 个特征增益函数 $g_i(s)$ 的极点多项式. 因此这一点是清楚的,即 $e_G(s)$ 在虚轴上没有零点，当且仅当特征增益轨线在无穷远的分支数就等于 $G(s)$ 在虚轴上的极点数. 注意,若轨线的一个分支走向无穷,而同时有另一分支由无穷远返回,此时应仔细不能把这个算成两个无穷分支.

于是闭环稳定的必要充分条件可改写成

(i) $\sum_{i=1}^{l} N\left(g_i, -\frac{1}{k}\right) = -P_G$;

(ii) 特征增益轨线不通过临界点 $\left(-\frac{1}{k} + j0\right)$;

(iii) 特征增益轨线通向无穷的分支数刚好是 $G(s)$ 在虚轴上的极点数;

(iv) $p_d(s)$ 仅有左半平面的零点.

这就完成了广义 Nyquist 稳定性判据提法 1 的证明.

如果子系统完全由其传递函数矩阵表述，则它们的状态空间表示每一个子系统都是可观测与可控的,于是

$$p_{d_1}(s) = p_{d_2}(s) = \cdots = p_{d_h}(s) = 1 \qquad (4.2.32)$$

因而有

$$p_d(s) = p_x(s) \qquad (4.2.33)$$

于是 Nyquist 判据提法 1 的条件 (iv) 等价于 $p_x(s)$ 仅有左半平面的零点　如果子系统用状态空间表述，但我们已知子系统没有不可观测或不可控模位于右半平面或虚轴上时，上述情况也能发生. 在这种情况下条件 (i) 与 (iv) 可合并给出一个不需要解耦零点信息的判据.

为说明这一点我们首先证明，当

(i) $p_d(s)=p_x(s)$ (4.2.34)

或

(ii) $p_d(s)=p_x(s)p_{d_1}(s)p_{d_2}(s)\cdots p_{d_h}(s)$ (4.2.35)

其中$\{p_{d_i}(s):i=1,2,\cdots,h\}$的零点均在左半平面.

则条件(i'),(iii')与(v')等价于

$$\sum_{i=1}^{l}N(f_i,0)=-\sum_{i=1}^{h}P_{G_i} \tag{4.2.36}$$

其中P_{G_i}是$G_i(s)$的右半平面极点数.对闭环系统稳定说来在条件(ii')与(iv')已满足时,式(4.2.36)的充分必要性可按如下证明:

由方程(4.2.9),(4.2.18)与(4.2.31)有

$$\sum_{i=1}^{h}P_{G_i}=e+\sum_{i=1}^{l}P_{f_i}+P_x \tag{4.2.37}$$

其中P_x是$p_x(s)$在右半平面的零点数,将它与式(4.2.26)合并就有

$$\sum_{i=1}^{l}N(f_i,0)=\sum_{i=1}^{l}Z_{f_i}+e+P_x-\sum_{i=1}^{h}P_{G_i} \tag{4.2.38}$$

同样,注意

$$p_d(s)=p_x(s)p_{d_1}(s)\cdots p_{d_h}(s)$$

所以若用P_d表$p_d(s)$在右半平面的零点数,则

$$P_d=P_x \tag{4.2.39}$$

且方程(4.2.38)变成为

$$\sum_{i=1}^{l}N(f_i,0)=\sum_{i=1}^{l}Z_{f_i}+e+P_d-\sum_{i=1}^{h}P_{G_i} \tag{4.2.40}$$

为确立条件(4.2.36)的必要性,设

$$\sum_{i=1}^{l}N(f_i,0)\neq-\sum_{i=1}^{h}P_{G_i}$$

于是由方程(4.2.40)推知

$$\sum_{i=1}^{l} Z_{f_i} \neq 0 \text{ 或 } e \neq 0 \text{ 或 } P_d \neq 0$$

或上述的任一组合，由此系统将是闭环不稳定的．从而证明了条件(4.2.36)对闭环稳定说来是必要的．

对充分性设

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) = -\sum_{i=1}^{h} P_{G_i}$$

于是由方程(4.2.40)则必然有

$$\sum_{i=1}^{l} Z_{f_i} = e = P_d = 0$$

因而系统是闭环稳定．即式(4.2.36)的充分性得以确立．

因此我们已证明了当条件 (4.2.34) 或条件 (4.2.35) 成立时对闭环稳定性说来下述条件是充分必要的:

(i‴) $\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) = -\sum_{i=1}^{h} P_G$;

(ii‴) $\{f_i(s): i = 1, 2, \cdots l\}$ 在虚轴上没有零点;

(iii″) $e_G(s)$ 在虚轴上没有零点.

但我们在证明提法 1 中已经证明

$$\sum_{i=1}^{l} N(f_i, 0) \equiv \sum_{i=1}^{l} N\left(g_i, -\frac{1}{k}\right)$$

条件 (ii‴) 等价于特征增益轨线不经过$\left(-\frac{1}{k} + j0\right)$这一点；以及条件 (iii‴) 等价于特征增益轨线的无穷分支数正好等于 $G(s)$ 在虚轴上的极点数．由此就完成了广义 Nyquist 稳定性判据提法 2 的证明

4.3 例

为叙述稳定性判据，考虑在第 3.3-5 节与 3.4-2 节已用过

的例，那儿一般反馈结构是用其开环增益矩阵表述的，即

$$G(s)=\frac{1}{1.25(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

由定义该系统没有不可观测或不可控的模，校验一下问题的提法则可以认为系统结构是由一个子系统 $G_1(s)=G(s)$ 所构成，因此可以直接应用稳定性判据的提法 1 或提法 2.

$G(s)$ 的极点多项式是

$$P_G(s)=(s+1)(s+2)$$

它在右半平面或虚轴上没有零点，因此闭环稳定性成立仅需以特征增益轨线对临界点的反时针绕数为零、特征增益轨线不通过临界点和不存在无穷分支. 特征增益轨线画在图 17 上，于是可得到下述稳定性条件:

(i) $-\infty\leqslant\frac{-1}{k}<-0.8$，特征增益轨线不绕过也不经过临界点，因而闭环系统对 $0\leqslant k<1.25$ 是稳定的;

(ii) $-\frac{1}{k}=-0.8$，特征增益轨线通过临界点，因而闭环系统对 $k=1.25$ 是不稳定的;

(iii) $-0.8<-\frac{1}{k}<-0.4$，临界点有一个顺时针绕数，因而闭环系统对 $1.25<k<2.5$ 是不稳定的;

(iv) $-\frac{1}{k}=-0.4$，特征增益轨线通过临界点，因而闭环系统对 $k=2.5$ 是不稳定的;

(v) $-0.4<-\frac{1}{k}<0$，特征增益轨线不绕过也不经过临界点，因而闭环系统对 $2.5<k<\infty$ 是稳定的;

(vi) $-\frac{1}{k}=0$，特征增益轨线通过临界点，因而闭环系统对 $k=\infty$ 是不稳定的;

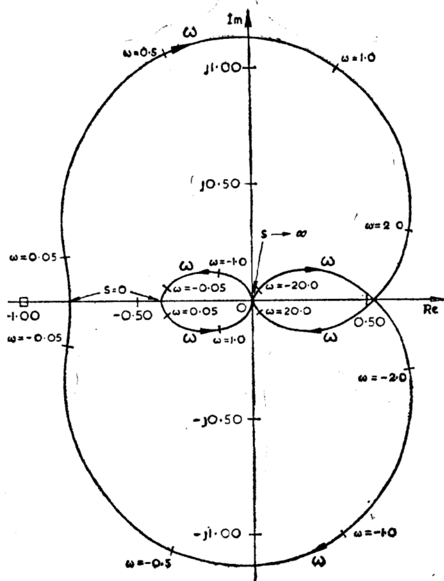

74
Im
ω
ω=0.5
ω=1.0
j1.00
j0.50
ω=2.0
S → ∞
ω=0.05
ω
ω=-1.0
ω
S=0
ω=-0.05
ω=-20.0
-1.00
-0.50
ω=0.05
O
ω=20.0
Re
0.50
ω=-0.05
ω
ω=1.0
ω
ω=-2.0
-j0.50
-j1.00
ω=-1.0
ω=-0.5
ω

图 17 特征增益轨线

(vii) $0 < -\frac{1}{k} < 0.533$，特征增益轨线绕过临界点顺时针两圈，因而闭环系统对 $-\infty < k < -1.875$ 是不稳定的；

(viii) $-\frac{1}{k} = 0.533$，特征增益轨线通过临界点，因而闭环系统对 $k = -1.875$ 是不稳定的；

(ix) $0.533 < -\frac{1}{k} \leqslant 0$，特征增益轨线不绕过也不通过临界点，因而闭环系统对 $-1.875 < k \leqslant 0$ 是稳定的.

注意 k 取负值对应的为正反馈.

参 考 文 献

[1] H. Nyquist, "The Regeneration Theory", Bell System Tech. J., 11, 126—147, 1932.

[2] A. G. J. MacFarlane, "Return-difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems", Proc. IEE, 117, 2037—2049, 1970.

[3] A. G. J. MacFarlane and J. J. Belletrutti, "The characteristic Locus Design Method", Automatica, 9, 575—588, 1973.

[4] J. F. Barman and J. Katzenelson, Memorandum ERL-383, Electronics Research Laboratory, College of Engineering, Univ. of California, Berkeley, 1973.

[5] J. F. Barman and J. Katzenelson, "A generalized Nyquist-type stability criterion for multivariable feedback systems", Int. J. Control, 20, 593—622, 1974.

[6] A. G. J. MacFarlane and N. Karcanias, "Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory", Int. J. Control, 24, 33—74, 1976.

[7] C. A. Desoer and W. S. Chan, "The Feedback Interconnection of Lumped Linear Time-invariant Systems", J. Franklin Inst., 300, 335—351, 1975.

[8] A. G. J. MacFarlane, "Dynamical System Models", Harrap, London, 1970.

[9] E. Hille, "Analytic Function Theory", Vol. 1, Ginn and Co., U. S. A., 1959.

第五章 广义逆 Nyquist 稳定性判据

在这一章,我们将把单输入单输出反馈系统的逆 Nyquist 判据推广至一般反馈结构,并以此作为前一章 Nyquist 稳定性判据的补充.这一发展是以开环增益矩阵 $G(s)$ 与逆特征增益函数集合之间的联系为基础的,逆 Nyquist 图的对应集合将称为逆特征增益轨线.

5.1 逆特征增益函数

Nyquist 稳定性判据推广的一个主要方面,在第四章给出的是代数函数集合——特征增益函数与传递函数矩阵 $G(s)$ 间用特征方程

$$\Delta(g,s)=\det[gI_m-G(s)]=0 \qquad (5.1.1)$$

建立的联系.若 $G(s)$ 秩为 m 则其逆函数 $G(s)^{-1}$ 存在,且有一对应的特征方程

$$\Lambda(\overset{*}{g},s)=\det[\overset{*}{g}I_m-G(s)^{-1}]=0 \qquad (5.1.2)$$

若 $\Lambda(\overset{*}{g},s)$ 当作 $\overset{*}{g}$ 具有 s 的有理函数系数的多项式,则式(5.1.2)确定了代数函数 $\{\overset{*}{g}_i(s);\ i=1,2,\cdots,l\}$ 的集合,以后称其为**逆特征增益函数**.若 $\Lambda(\overset{*}{g},s)$ 在 s 的有理函数域上不可约,则逆特征增益函数 $\overset{*}{g}(s)$ 同 $g(s)$ 一样,有一由 m 页复 s 平面以适当方法粘接的 Riemann 曲面为其定义域.事实上由于矩阵的特征值是其逆的特征值的倒数,即有

$$\overset{*}{g}(s) = \frac{1}{g(s)} \tag{5.1.3}$$

因而 $\overset{*}{g}(s)$ 与 $g(s)$具有相同的分支点,从而也具有相同的 Riemann 曲面作为定义域.

逆特征增益函数是一基础,在其上可以建立逆 Nyquist 稳定性判据.

5.2 极点/零点关系

在这一节将建立一些在广义逆 Nyquist 判据证明中将要用到的极点/零点关系.

由于矩阵的特征值是其逆的特征值的倒数，于是逆特征增益函数集合的极点就是特征增益函数集合的零点，且反之亦真. $\overset{*}{g}_i(s)$ 的极点与零点多项式分别表示为 $p_g^*(s)$与 $z_g^*(s)$,因此有

$$p_{g_i}^*(s) = z_{g_i}(s) \tag{5.2.1}$$

与

$$z_{g_i}^*(s) = p_{g_i}(s);\ i = 1, 2, \cdots, l \tag{5.2.2}$$

由第 3.3-2 节已清楚，对开环增益矩阵 $G(s)$ 说来,存在 Smith-McMillan 正则型[2]使

$$G(s) = H_G(s)M_G(s)J_G(s) \tag{5.2.3}$$

其中 $H_G(s)$, $J_G(s)$ 均为 $m \times m$ 单模态矩阵，$M_G(s)$ 具有 Smith-McMillan 型,它是

$$M_G(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \cdots, \frac{\varepsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\right] \tag{5.2.4}$$

于是 $G(s)$ 的极点与零点定义为

$$p_G(s) = \prod_{i=1}^{m} \psi_i(s) \tag{5.2.5}$$

和

$$z_G(s) = \prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i(s) \tag{5.2.6}$$

的零点．现设 $G(s)$ 秩为 m，则对式(5.2.3)求逆有

$$G(s)^{-1} = J_G(s)^{-1} M_G(s)^{-1} H_G(s)^{-1} \tag{5.2.7}$$

运用m阶的初等变换矩阵 E，其定义为

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = E^{-1} \tag{5.2.8}$$

可将 $G(s)^{-1}$ 改写为

$$G(s)^{-1} = J_G(s)^{-1} E E M_G(s)^{-1} E E H_G(s)^{-1} \tag{5.2.9}$$

或

$$G(s)^{-1} = H_G^*(s) M_G^*(s) J_G^*(s) \tag{5.2.10}$$

其中

$$H_G^*(s) = J_G(s)^{-1} E \tag{5.2.11}$$

$$J_G^*(s) = E H_G(s)^{-1} \tag{5.2.12}$$

和

$$\begin{aligned} M_G^*(s) &= E M_G(s)^{-1} E \\ &= \operatorname{diag}\left[\frac{\phi_m(s)}{\varepsilon_m(s)}, \frac{\phi_{m-1}(s)}{\varepsilon_{m-1}(s)}, \cdots, \frac{\phi_1(s)}{\varepsilon_1(s)}\right] \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

它正是 $G(s)^{-1}$ 的 Smith-McMillan 型，将传递函数矩阵极点与零点的定义应用于 $G(s)^{-1}$，则

$$p_G^*(s) = \prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i(s) = z_G(s) \tag{5.2.14}$$

$$z_G^*(s) = \prod_{i=1}^{m} \phi_i(s) = p_G(s) \tag{5.2.15}$$

其中 $p_G^*(s)$，$z_G^*(s)$ 表示 $G(s)^{-1}$ 对应的极点与零点多项式.

在第 3.3-3 节给出了 $G(s)$ 的极点、零点多项式与特征增益函数集 $\{g_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的极点、零点之间的关系为

$$p_G(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} b'_{i0}(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} p_{g_i}(s) \qquad (5.2.16)$$

和

$$z_G(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} b'_{il_i}(s) = e_G(s) \prod_{i=1}^{l} z_{g_i}(s) \qquad (5.2.17)$$

如果将整个特征增益函数集合的极点、零点多项式表示为 $p_g(s)$ 与 $z_g(s)$，而对应逆特征增益函数集的用 $p_g^*(s)$与 $z_g^*(s)$ 表示，则关系式 (5.2.16) 与 (5.2.17) 以及关系式 (5.2.14) 与 (5.2.15)联合可给出

$$p_G(s) = z_G^*(s) = e_G(s)p_g(s) = e_G(s)z_g^*(s) \quad (5.2.18)$$

与

$$\begin{aligned} z_G(s) = p_G^*(s) &= e_G(s)z_g(s) \\ &= e_G(s)p_g^*(s) \end{aligned} \qquad (5.2.19)$$

这些极点/零点关系在以后证明逆 Nyquist 稳定性判据时将会用到.

5.3 逆特征增益轨线——广义逆 Nyquist 图

逆特征增益轨线是在复平面上用开环增益矩阵 $G(s)$ 的每个特征值的倒数在 s 沿 Nyquist D回路按标准(顺时针)方向走过时描画出的轨线. 用计算特征增益轨线的算法可以计算逆特征增益轨线 (第 3.4-1 节)，但步子 (iv) 应改为将 $g_i(j\omega_a)$ 的倒数标在复平面上.

现在提出并证明广义逆 Nyquist 判据.

5.4 广义逆 Nyquist 稳定性判据

若一般反馈结构中子系统都用状态空间型描述，则下述提法的判据是可用的.

提法 1 一般反馈结构是闭环稳定的，当且仅当:

(1a) 逆特征增益轨线集合沿反时针方向绕过临界点 $(-k+j0)$ 的圈数净和与逆特征增益轨线反时针绕过原点的圈数净和之差等于 $G(s)$ 在右半平面的极点数.

(2) 逆特征增益轨线不通过临界点 $(-k+j0)$.

(3a) 逆特征增益轨线通过原点的分支数等于 $G(s)$ 在虚轴上的极点数. 且

(4) 开环系统 $S(A, B, C, D)$ 的矩阵 A 的特征值中对应系统不可观测与不可控模的特征值均在左半平面，该开环系统是指输入为第一子系统的输入，输出为第 h 个子系统的输出所对应的部分.

条件 (1a) 与 (3a) 可以改换为

(1b) 逆特征增益轨线绕临界点 $(-k+j0)$ 沿反时针方向圈数的净和等于 $G(s)$ 在右半平面的零点数.

(3b) 逆特征增益轨线过无穷远的分支数是 $G(s)$ 在虚轴上的零点数.

如果子系统均由它们的传递函数矩阵表出，或已知每个子系统均没有位于右半平面或虚轴上的不可观测或不可控模，则判据可采用下述提法.

提法 2 一般反馈结构闭环稳定，当且仅当:

(1a) 逆特征增益轨线集合绕过临界点 $(-k+j0)$ 反时针圈数的净和与逆特征增益轨线绕过原点反时针圈数净和之差应等于 $G_1(s)$, $G_2(s)$, $\cdots$, $G_h(s)$ 在右半平面极点之总数.

（2）逆特征增益轨线不通过临界点 $(-k+j0)$.

（3a）逆特征增益轨线经过原点的分支数等于 $G(s)$ 在虚轴上的极点数.

（3a）可以用提法 1 的条件（3b）来代替. 而且若子系统均为方的，即有相同数目的输入数与输出数，则条件（1a）可以代之为

（1b）逆特征增益轨线绕过临界点 $(-k+j0)$ 的反时针圈数的净和等于 $G_1(s)$, $\cdots$, $G_h(s)$ 在右半平面零点的总数.

注意，若条件（2）或条件（3a）/（3b）不满足，则闭环系统有一个或多个极点在虚轴上，因而它不能是输入-输出稳定，但平衡位置仍可能稳定.

对 D 矩阵为零的严格正则系统，其逆特征增益轨线当 s 趋于无穷时将趋于无穷，因而 $s=\infty$ 是逆函数的一个极点. 这样在实际上为了得到封闭曲线仅仅沿虚轴描画是不够的而必须沿整个 D 回线描画逆特征增益回线，用这样的办法采用逆特征增益回线绕过临界点与原点的圈数的净和才可能得到. 作为一例，在图 18 上画出了

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^3} \tag{5.4.1}$$

的逆特征增益轨线.

在稳定性判据的两个提法中，如果应用（1a）而不是（1b）时，则 D 回线中离开虚轴那一段的描画是不必要的，这是因为 D 回线上大圆周那一段对应的逆特征增益轨线绕过原点与临界点的圈数正相同，因而彼此可以消去. 因此当应用条件（1a）时一个有用的法则是用一个大半圆连接轨线散开的端点而不管可能存在的外面的绕圈数. 究竟是用右半平面还是左半平面进行半个大圆连接，应考虑这样的事实，即，$\overset{*}{g}(s)$ 的 Riemann 曲面上形成的 Nyquist 曲线集合（粘成了一合适的

Nyquist D 回线集合)在 $\overset{*}{g}$ 平面的映射 $\overset{*}{g}(s)$ 应是保角映射．这意味着若我们想象两个人，X 与 Y，X 沿着定义域中曲线行走，Y 沿着对应象曲线行走，并在每一步 X 确定对应的象点 Y，然后 X 转向它自己的右边，Y 也将转向它自己的右边．

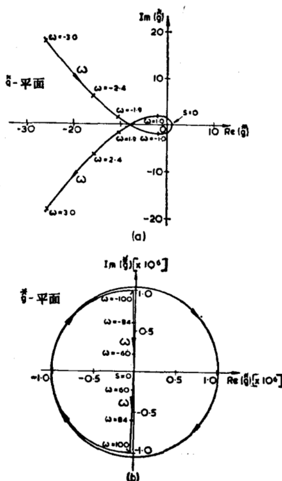


图 18　$G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}$ 的逆特征增益轨线

(a) 原点附近小范围；(b) 大范围

5.5 广义逆 Nyquist 稳定性判据的证明

对图 3 所示的一般反馈结构，其闭环传递函数矩阵 $R(s)$ 由关系式

$$R(s) = kG(s)[I_m + kG(s)]^{-1} \tag{5.5.1}$$

所给出，它的逆应为

$$R(s)^{-1} = \frac{1}{k} G(s)^{-1} + I_m \tag{5.5.2}$$

若用$\{\overset{*}{r}_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$表示确定 $R(s)^{-1}$ 特征值的代数函数，将特征值移动定理[3]运用于式(5.5.2)，则有

$$\overset{*}{r}_i = \frac{1}{k} \overset{*}{g}_i(s) + 1; \ i = 1, 2, \cdots, l \tag{5.5.3}$$

若用首一多项式 $p_r^*(s)$，$z_r^*(s)$ 表示对应代数函数 $\{\overset{*}{r}_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的完全集的极点与零点多项式，则有

$$p_r^*(s) = p_g^*(s) \tag{5.5.4}$$

现在用 $kG(s)$ 后乘方程(5.5.2)，则有

$$kR(s)^{-1}G(s) = I_m + kG(s) = F(s) \tag{5.5.5}$$

这是系统的返差矩阵，取行列式则有

$$\det F(s) = k^m \frac{\det [R(s)^{-1}]}{\det [G(s)^{-1}]} = \gamma \frac{z_r^*(s) p_g^*(s)}{p_r^*(s) z_g^*(s)} \tag{5.5.6}$$

其中 γ 是与 s 无关的常数. 但是

$$\det F(s) = \beta \frac{z_F(s)}{p_F(s)} = \beta \frac{z_f(s)}{p_f(s)} \tag{5.5.7}$$

其中 $p_f(s)$，$z_f(s)$ 是代数函数 $\{f_i(s); i = 1, 2, \cdots, l\}$ 集合的首一极点与零点多项式，因而

$$\beta = \gamma \tag{5.5.8}$$

且

$$z_f(s)=\frac{\overset{*}{z}_r(s)}{\overset{*}{p}_r(s)}\frac{\overset{*}{p}_g(s)}{\overset{*}{z}_g(s)}p_f(s) \tag{5.5.9}$$

由方程(4.2.18)与(5.1.21)有

$$p_f(s)=p_g(s)=\overset{*}{z}_g(s) \tag{5.5.10}$$

因而结合方程(5.5.4)与(5.5.9)则有

$$z_f(s)=\overset{*}{z}_r(s) \tag{5.5.11}$$

第四章的方程(4.2.19)表明闭环特征多项式可以表示为

$$\mathrm{CLCP}(s)=p_d(s)e_G(s)\prod_{i=1}^{l}d'_{it_i}(s) \tag{5.5.12}$$

或用本章采用的记号等价地写成

$$\mathrm{CLCP}(s)=p_d(s)e_G(s)z_f(s) \tag{5.5.13}$$

因而联系到式(5.5.11)则有

$$\mathrm{CLCP}(s)=p_d(s)e_G(s)\overset{*}{z}_r(s) \tag{5.5.14}$$

这样就可推出闭环系统稳定的充要条件为

(i) $e_G(s)=0$ 仅有左半平面的根;

(ii) $\overset{*}{z}_r(s)=0$ 仅有左半平面的根;

(iii) $p_d(s)=0$ 仅有左半平面的根.

现设如图 16 所示的 Nyquist D 回线画在未粘成 Riemann 曲面 $\boldsymbol{R}^*_{r_i}$ 前的那些对应的复平面上，在这个 Riemann 曲面上 $\overset{*}{r}_i$ 已定义. 考虑对应 $\overset{*}{r}_i(s)$ 的第 j 个曲面 $\boldsymbol{R}^*_{r_j}$，一旦曲面已经粘成，则 Nyquist D 回线就形成一闭合的 Jordan 曲线集，它在 $\boldsymbol{R}^*_{r_i}$ 上包围右半平面区域. 这样扩展的辐角原理就可以应用到每个这样的右半平面区域之上. 对每一个特定的右半平面区域说来，(它未必要单连通但需以 Nyquist D 回线组成其边界) 都可以求得 $\overset{*}{r}_i(s)$ 在该区域零点与极点数之差，将等于对该特定区域的边界曲线在 $\overset{*}{r}_i(s)$ 之下其象在 $\boldsymbol{C}$ (复 $\overset{*}{r}$ 平面) 上绕过原点的顺时针圈数. 若考虑所有右半平面区域并对其

每一个运用扩展的辐角原理，则有

$$N(\overset{*}{r}_i,0) = Z^*_{r_i} - P^*_{r_i} \tag{5.5.15}$$

其中

(i) $N(\overset{*}{r}_i, 0)$是在$\boldsymbol{C}$上用象曲线集合绕过原点的顺时针圈数的净和，这些象曲线是映射$\overset{*}{r}_i(s)$对粘合成的$\boldsymbol{R}^*_{r_i}$上的曲线集的象，该曲线集是在$\boldsymbol{R}^*_{r_i}$未粘好时先画出而后随$\boldsymbol{R}^*_{r_i}$粘成而形成的；

(ii) $Z^*_{r_i}$是$\overset{*}{r}_i(s)$在右半平面的零点数；

(iii) $P^*_{r_i}$是$\overset{*}{r}_i(s)$在右半平面的极点数.

如果我们用同样的方法考虑对应的逆特征增益函数$\overset{*}{g}_i(s)$，则可以求得

$$N(\overset{*}{g}_i, 0) = Z^*_{g_i} - P^*_{g_i} \tag{5.5.16}$$

其中

(i) $N(\overset{*}{g}_i, 0)$是用对应$\overset{*}{g}_i(s)$的逆特征增益轨线在$\boldsymbol{C}$上绕过原点的顺时针圈数的净和；

(ii) $Z^*_{g_i}$是$\overset{*}{g}_i(s)$在右半平面的零点数；

(iii) $P^*_{g_i}$是$\overset{*}{g}_i(s)$在右半平面的极点数.

合并方程(5.5.15)与(5.5.16)可以给出

$$N(\overset{*}{r}_i, 0) - N(\overset{*}{g}_i, 0) = Z^*_{r_i} - P^*_{r_i} - Z^*_{g_i} + P^*_{g_i} \tag{5.5.17}$$

运用方程(5.5.4)则有

$$N(\overset{*}{r}_i,0) - N(\overset{*}{g}_i, 0) = Z^*_{r_i} - Z^*_{g_i} \tag{5.5.18}$$

若考虑代数函数$\{\overset{*}{r}_i: i = 1, 2, \cdots, l\}$与$\{\overset{*}{g}_i: i = 1,2,\cdots, l\}$的整个集合，则有

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} - \sum_{i=1}^{l} Z^*_{g_i} \qquad (5.5.19)$$

对闭环稳定性的条件 (ii) 可以等价地说是 $\overset{*}{r}_i(s)$ 在右半平面或虚轴上没有零点，这样上式就可改写成

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = -\sum_{i=1}^{l} Z^*_{g_i} \qquad (5.5.20)$$

加上 $\{\overset{*}{r}_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$ 在虚轴上没有零点．因此闭环系统稳定性的必要充分条件就可改写为

(i′) $e_G(s) = 0$ 没有右半平面的根；

(ii′) $e_G(s) = 0$ 没有虚轴上的根；

(iii′) $\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = -\sum_{i=1}^{l} Z^*_{g_i}$;

(iv′) $\{\overset{*}{r}_i(s): i = 1, \cdots, l\}$ 在虚轴上没有零点；

(v′) $p_d(s)$ 仅有左半平面的零点．

极点、零点间的关系式(5.2.18)将引导我们去考虑把条件 (i′) 与 (iii′) 合并成一单一的等价条件：

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = -P_G \qquad (5.5.21)$$

其中 P_G 是 $G(s)$ 在右半平面的极点数．在条件 (ii′), (iv′) 与 (v′) 成立的前提下，式(5.5.21)可以作为闭环稳定性的充分必要条件，其证明如下：

从关系式(5.2.18)，可以有

$$P_G = e + \sum_{i=1}^{l} Z^*_{g_i} \qquad (5.5.22)$$

其中 e 是 $e_G(s)$ 在右半平面的极点数，将它与式(5.5.19)合并就有

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i,\ 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i,\ 0) = \sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} + e - P_G \quad (5.5.23)$$

为建立式(5.5.21)条件的必要性，设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i,\ 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i,\ 0) \neq -P_G$$

则由方程(5.5.23)就可推出

$$\sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} \neq 0 \text{ 或 } e \neq 0$$

由此可知条件(5.5.21)对闭环稳定是必要的.

对充分性，设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i,\ 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i,\ 0) = -P_G$$

则由方程(5.5.23)可推知

$$\sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} = e = 0$$

因而系统是闭环稳定的，即条件(5.5.21)的充分性成立.

这样就可以将闭环系统稳定性的充分必要条件表述如下:

(i″) $\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i,\ 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i,\ 0) = -P_G$;

(ii″) $\{\overset{*}{r}_i: i = 1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$ 在虚轴上没有零点;

(iii″) $e_G(s) = 0$ 在虚轴上没有根;

(iv″) $p_d(s)$ 仅有左半平面零点.

由方程(5.5.3)可清楚地知道

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i,\ 0) = \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i,\ -k) \quad (5.5.24)$$

于是条件 (i″) 将等价于稳定性判据提法 1 中的 (1a).

同样由方程(5.5.3)可知 $\{\overset{*}{r}_i(s): i=1, 2, \cdots, l\}$ 在虚轴上有零点，当且仅当逆特征增益轨线经过临界点 $(-k+j0)$，因此条件 (ii″) 等价于稳定性判据提法 1 的条件(2).

由极点、零点关系式(5.2.18)与(5.2.19)，条件 (iii″) 显然等价于稳定性判据两提法中条件 (3a) 与 (3b) 中任一个.

这样为完成稳定性判据提法 1 的证明，留下的是证明条件 (1a) 与(1b)等价. 为做到这一点我们将证明当条件(ii″)，(iii″) 与 (iv″) 成立时，条件

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) = -Z_G \quad (5.5.25)$$

是闭环稳定的充分必要条件，其中 Z_G 为 $G(s)$ 在右半平面的零点数.

由关系式(5.1.22)可有

$$Z_G = e + \sum_{i=1}^{l} P^*_{g_i} \quad (5.5.26)$$

其中 $P^*_{g_i}$ 是 $\overset{*}{g}_i(s)$ 在右半平面的极点数. 但由方程 (5.5.3) 知 $\overset{*}{r}_i(s)$ 与 $\overset{*}{g}_i(s)$ 的极点相同，因而

$$Z_G = e + \sum_{i=1}^{l} P^*_{r_i} \quad (5.5.27)$$

若联合方程(5.5.27)与(5.5.15)，其中后者对每个 $j=1, 2, \cdots, l$ 均成立，则有

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} + e - Z_G \quad (5.5.28)$$

为建立条件(5.5.25)的必要性，设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) \neq -Z_G$$

则由方程(5.5.28),上式可以导致

$$\sum_{i=1}^{l} Z_{ri}^{*} \neq 0 \text{ 和/或 } e \neq 0$$

而由此则可断言条件(5.5.25)对闭环稳定性是必要的.*)

对充分性,设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) = -Z_G$$

则由方程(5.5.28)可有

$$\sum_{i=1}^{l} Z_{ri}^{*} = e = 0$$

因而在条件(ii″),(iii″)与(iv″)成立的条件下可推知系统是闭环稳定的. 从而式(5.5.25)的充分性得证.

这就完成了广义逆 Nyquist 稳定性判据提法 1 的证明.■

稳定性判据的提法 2 应用于这样的系统[参见第四章],在其中或

(i) $$p_d(s) = p_x(s) \tag{5.5.29}$$

或

(ii) $$p_d(s) = p_x(s)p_{d_1}(s)p_{d_2}(s)\cdots p_{d_h}(s) \tag{5.5.30}$$

其中 $\{p_{d_i}(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的零点全在左半平面.

在上述这些情形,可以联合提法 1 的条件(1a)与(4)成为单一的等价条件

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = -\sum_{i=1}^{h} P_{G_i} \tag{5.5.31}$$

在条件(2)与(3)已成立的前提下,条件(5.5.31)对闭环系统稳定性的充分性与必要性可以证明如下.

由方程(4.2.37)与(4.2.38),有

---

*) 原文误为式(5.5.28)对闭环稳定性是必要的. ——译者注

$$\sum_{i=1}^{h} P_{G_i} = e + \sum_{i=1}^{l} P_{f_i} + P_d \tag{5.5.32}$$

但 $\{f_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的极点与 $\{g_i(s): i = 1,2,\cdots,l\}$ 的极点相同，而后者又与 $\{\overset{*}{g}_i(s): i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的零点相同。因而方程(5.5.32)可改写成

$$\sum_{i=1}^{h} P_{G_i} = e + \sum_{i=1}^{l} Z^*_{g_i} + P_d \tag{5.5.33}$$

现在式(5.5.33)可以与式(5.5.19)联合给出

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} + e + P_d - \sum_{i=1}^{h} P_{G_i} \tag{5.5.34}$$

应用式(5.5.24)它可变成

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} + e + P_d - \sum_{i=1}^{h} P_{G_i} \tag{5.5.35}$$

为确立条件(5.5.31)的必要性，设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) \neq -\sum_{i=1}^{h} P_{G_i}$$

则由方程(5.5.35)，可有

$$\sum_{i=1}^{l} Z^*_{r_i} \neq 0 \text{ 或 } e \neq 0 \text{ 或 } P_d \neq 0$$

或它们的任何组合成立，于是系统将是闭环不稳定。这就可以断言条件(5.5.31)对闭环稳定性是必要的。

对于充分性，设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) - \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, 0) = -\sum_{i=1}^{h} P_{G_i}$$

则由方程(5.5.35)可以有

$$\sum_{i=1}^{l} Z_{r_i}^* = e = P_d = 0$$

从而系统在已满足 (2), (3) 的条件下是闭环稳定的. 因此式(5.5.31)的充分性得以确立.

于是为完成稳定性判据提法 2 的证明，留下的是要证明条件 (1a) 与 (1b) 的等价性. 为此，我们将证明当条件 (2) 与(3)成立时,条件 (1b) 即

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) = -\sum_{i=1}^{h} Z_{G_i} \quad (5.5.36)$$

是闭环稳定的必要充分条件,其中 Z_{G_i} 是 $G_i(s)$ 在右半平面的零点数

方程(5.5.15)对于 $j = 1, 2, \cdots, l$ 均成立,因此

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{r}_i, 0) = \sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} Z_{r_i}^* - \sum_{i=1}^{l} P_{r_i}^* \quad (5.5.37)$$

又由于 $\{\overset{*}{r}_i(s); i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的极点与 $\{\overset{*}{g}_i(s); i = 1, 2, \cdots, l\}$ 的极点相同,方程(5.5.37)可以改写成

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) = \sum_{i=1}^{l} Z_{r_i}^* - \sum_{i=1}^{l} P_{g_i}^* \quad (5.5.38)$$

若子系统 $\{G_i(s): i = 1, 2, \cdots, h\}$ 每个都是方的，则 $P_x(=P_d)$ 是在 $G(s)$ 形成时零点、极点相消中在右半平面的零点(或极点)数. 因此,若 $G(s)$ 在右半平面零点数给定为

$$Z_G = e + \sum_{i=1}^{l} Z_{g_i} \quad (5.5.39)$$

则必有

$$\sum_{i=1}^{h} Z_{G_i} = e + \sum_{i=1}^{l} Z_{g_i} + P_d \qquad (5.5.40)$$

或由于 $\overset{*}{g}_i(s)$ 的极点恒等于 $g_i(s)$ 的零点，则

$$\sum_{i=1}^{h} Z_{G_i} = e + \sum_{i=1}^{l} P^*_{g_i} + P_d \qquad (5.5.41)$$

于是方程(5.5.38)与(5.5.41)可联合起来给出

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) = \sum_{i=1}^{l} Z^*_{ri} + e + P_d - \sum_{i=1}^{h} Z_{G_i} \quad (5.5.42)$$

为确立式(5.5.36)的必要性，设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) \neq -\sum_{i=1}^{h} Z_{G_i}$$

再由方程(5.5.42)，就可推得

$$\sum_{i=1}^{l} Z^*_{ri} \neq 0 \text{ 或 } e \neq 0 \text{ 或 } P_d \neq 0$$

或上述的任何组合，从而系统将是闭环不稳定的. 这就证明了条件(5.5.36)*)对闭环稳定是必要的.

对于充分性，设

$$\sum_{i=1}^{l} N(\overset{*}{g}_i, -k) = -\sum_{i=1}^{h} Z_{G_i}$$

则由方程(5.5.42)，就可推得

$$\sum_{i=1}^{l} Z^*_{ri} = e = P_d = 0$$

因而在(2)，(3)条件已成立的前提下，系统是闭环稳定的. 从而条件(3.3.36)的充分性得以确立.

这就完成了广义逆 Nyquist 稳定性判据的证明.

---

*) 原书误为式(5.5.42). ——译者注

5.6 例

为说明稳定性判据，考虑在第三、四两章中用过的例子：

$$G(s) = G_1(s) = \frac{1}{1.25(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

开环增益矩阵 $G(s)$ 的极点与零点多项式分别为

$$P_G(s) = (s+1)(s+2), \quad Z_G(s) = 1$$

于是有

$$P_G = 0, \quad Z_G = 0$$

其逆特征增益轨线如图 19 所示

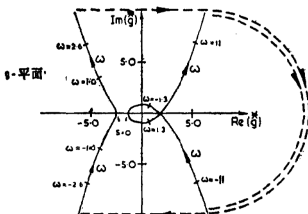


图 19 逆特征增益轨线

由于不存在不可观或不可控模，因而提法 1 与提法 2 均可直接运用. 实际上，由于有效地仅有一个子系统，两个提法在这里将无区别.

考查广义逆 Nyquist 稳定性判据列举的条件，可以发现对于

$$-1.875 < k \leqslant 0$$

$$0 \leqslant k < 1.25$$

与

$$2.5 < k < \infty$$

系统是稳定的。在增益控制变量 k 上所加的限制同第4.3节的一致，在那里用的是广义 Nyquist 判据。

有意义的是指出逆 Nyquist 式的判据现在已被 Mees 与 Rapp 应用于建立多变量非线性反馈系统的稳定性判据[6]。

参 考 文 献

[1] A. L. Whiteley, "Fundamental Principles of Automatic Regulators and Servo Mechanisms", J. IEE, 5—22, 1947.

[2] H. H. Rosenbrock, "State Space and Multivariable Theory", Nelson, London, 1970.

[3] A. G. J. MacFarlane, "Dynamical System Models", Harrap, London, 1970.

[4] A. G. J. MacFarlane, "Return-difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems", Proc. IEE, 117, 2037—2049, 1970.

[5] E. Hille, "Analytic Function Theory", Vol. 1, Ginn and Co., U. S. A., 1959.

[6] A. I. Mees and P. E. Rapp, "Stability criteria for multipleloop nonlinear feedback systems", Proc. IFAC Fourth Multivariable Technological Systems Symposium, Fredericton, Canada, 1977.

第六章　多变量根轨迹

Evans 方法[1,2,3]是在线性时不变单输入、单输出反馈系统分析与设计中的一个很好的图解方法，它可对系统闭环极点作为增益控制变量的函数进行估计．将它推广至多变量情形是有意义的，而且从状态空间观点去考虑特征频率轨线的渐近性质[4,5]和特征频率轨线的出发角与抵达角[6]这两方面，就可找到达到这一目的的路子．本章发展了一个在代数函数理论中已有结果的方法，在这里特征频率轨线的渐近性质与出发角及抵达角均可由系统的 Laplace 传递函数矩阵来确定[7,8,9]．

它同样可以阐明该方法如何能用来寻求多变量时不变线性调节器，最优闭环极点在品质判据中输入的权趋于零时的渐近性质[10]．

对于具有少数输入的系统，由于计算简单可以进行手算，因而该方法特别有用．

6.1　理论回顾

对图 3 所示的一般反馈结构，在第 3.3-4 节已表明特征频率轨线(多变量根轨迹)是特征增益函数 $g(s)$ 的 180° 等位相曲线，其中 $g(s)$ 是由方程

$$\Delta(g,s)\triangleq\det[gI_m-G(s)]=0 \tag{6.1.1}$$

或方程

$$\Phi(g,s)=b_0(s)\Delta(g,s)=0 \tag{6.1.2}$$

定义的，后者已用 s 的有理函数系数的最小公分母乘过. 为叙述简单且对通常传递函数常满足的情形，设 $\Delta(g,s)$ 在 s 的有理函数域上已为不可约多项式、特征增益函数 $g(s)$ 与增益控制变量 k 间的关系用表达式

$$g = -\frac{1}{k} \tag{6.1.3}$$

联系，因而在式(6.1.2)中替换掉 g 就有

$$\Phi(-k^{-1}, s) = k^{-m}\Gamma(k, s) = 0 \tag{6.1.4}$$

且

$$\Gamma(k, s) = 0 \tag{6.1.5}$$

用正实数 k 对 s 求解就确定了闭环极点 s 依赖于增益控制变量 k 的关系. 因此，除了可能的单点轨迹外，这样一个依赖关系的图形组成了给定系统的特征频率轨线. 注意，若不存在单点轨线则方程(6.1.5)直接等价于

$$\begin{aligned}\mathrm{CLCP}(s) &\triangleq \det[sI_n - A_c] \\ &= \det[sI_n - S(-k^{-1})] = 0\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

且特征频率轨线具有 n 个分支.

特征频率轨线中的每一个分支在理论上均可表示为下述形式：

$$s_i(k) = u_i(k) + jv_i(k); \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{6.1.7}$$

其中 $j = \sqrt{-1}$，而标码 i 表示分支的序号. 轨线第 r 个分支在点 $s_0 = s_r(k_0)$ 的切线，定义为通过点 s_0 和曲线上另一点 $s_1 = s_r(k_0 + \delta k)$ 的直线在 $\delta k \to 0$ 时的极限位置. 复数 $s_1 - s_0$ 可以用由 s_0 至 s_1 的向量表示(图 20)，而对应 $(s_1 - s_0) \div \delta k$ 的向量，当 $\delta k > 0$ 时与 $s - s_0$ 具有同样的方向. 因此可推得对应于

$$\dot{s}_r(k_0) = \left.\frac{ds_r(k)}{dk}\right|_{k_0} = \lim_{\delta k \to 0} \frac{s_1 - s_0}{\delta k}$$

$$= \lim_{\delta k \to 0} \frac{s_r(k_0 + \delta k) - s_r(k_0)}{\delta k} \qquad (6.1.8)$$

的向量，它是分支在 s_0 的切线，而这一向量和正实轴之间的夹角为

$$\theta = \text{辐角}(\dot{s}_r(k_0)) \qquad (6.1.9)$$

式 (6.1.9) 对确定特征频率轨线的渐近性质以及轨线的出发角与抵达角来说是基本的. 对 $k=0$，方程 (6.1.3) 推知特征频率轨线由开环系统的极点出发，因而轨线分支从这一极点的出发角将由式(6.1.9)中 $k_0 = 0$ 来确定. 对 $k = \infty$，方程(6.1.3)表明特征频率轨线将终止在系统的零点上. 因而对于轨线终止在有限零点的分支说来，公式(6.1.9)在 $k_0 = \infty$ 时给出分支抵达该零点时的角度. 若一个分支终止在无穷零点，则 $k_0 = \infty$ 的公式(6.1.9)将给出该分支渐近线与正实轴的夹角.

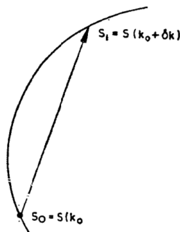


图 20 特征频率轨线切线的推导规则

式(6.1.9)不能认为是很适用的，这是由于一般不能明显地找到区别特征频率轨线分支的表达式，但是，在代数函数论中有着一种实际构造方法[7,8,9]，它可对一代数函数在给定点邻域内给出该函数的分支的级数表达式. 这一方法可直接应用 Newton 图的方法来做以求得级数中下一个最有效的项. 因此用一次 Newton 图，就可求得特征频率轨线在极点或零点(有限或无限)处的近似:

$$s_r(k) \simeq a + bk^{\alpha} \qquad (6.1.10)$$

其中 a 与 b 为复数，α 为有理实数. 若 α 为分数，则 k 的主根

是被理解的*⁾. 对于 k 为正实数对应的负反馈结构说来，$\alpha k^{\alpha-1}$ 将总是实的，因而应用式(6.1.9)至近似式(6.1.10)则有

$$\theta = \text{辐角}\ (b) \pm \tau 180^\circ \tag{6.1.11}$$

其中

$$\tau = \begin{cases} 0, & \text{当}\ \alpha > 0 \\ 1, & \text{当}\ \alpha < 0 \end{cases}$$

这些是由对 k 微分而得来的.

下一节将说明如何得到极点或零点附近的近似式(6.1.10)，从而确定特征频率轨线的渐近性质以及轨线的出发角与抵达角.

6.2 渐 近 性 质

Newton 图是一个在原点附近的图形构造，它可以用来寻求代数函数 $g(v)$ 特定分支级数表示中每个最有效的项，其中 $g(v)$ 具有当 v 趋于零时其值趋于零的性质. 因此，无论是寻求轨线的渐近性质还是出发角与抵达角，其第一步经常是在特征方程中用适当的变量替换来简化问题，使对代数函数的这种分支能求得一近似，对该分支当其独立变量趋于零时亦趋于零.

为了确定特征频率轨线的渐近性质，我们需要得到一个当 k 趋于∞时轨线在点 $s=\infty$ 周围的分支(或几个分支)的近似. 为此，在方程(6.1.2)中令

$$s = z^{-1} \tag{6.2.1}$$

于是就有

---

*⁾ 此处若 $\alpha=\beta/\gamma$，β,γ 为整数且互相无公因子，则 $k^\alpha=[k^{1/\gamma}]^\beta$，其中 $k^{1/\gamma}$ 指 k 的主根. ——译者注

$$\Phi(g, s) = \Phi(g, z^{-1}) = z^{-q}\Psi(g, z) \qquad (6.2.2)$$

其中 $q \leqslant n$ 是 $g(s)$ 的极点数．于是在值 $z = 0$ 的任何邻域内（$z = 0$ 本身被排斥在区域之外）方程 $\Phi(g, s) = 0$ 等价于方程

$$\Psi(g, z) = \sum \psi_{xy} g^x z^y \qquad (6.2.3)$$

对于一个严格正则系统，即其中 $D = 0$ 或若 D 为奇异

$$\psi_{00} = 0 \qquad (6.2.4)$$

否则 ψ_{00} 将为非零，从 Newton 图将会看到，对应的将不会有渐近性质．注意若 D 为非奇异，则 $g(s)$ 具有与极点数相同的零点数，这样就不能指望有任何闭环极点趋于无穷．

下一步是对 $\Psi(g, z)$ 构造 Newton 图，形如

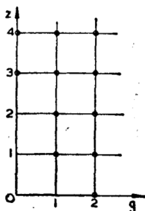
$$z \simeq c g^{\mu} \qquad (6.2.5)$$

的近似将由此得到，其中 c 为复数，μ 为有理实数．构造合适的 Newton 图的方法如下[8]：

在 (g, z) 平面上我们标出了方程(6.2.3)中 $\psi_{xy} \neq 0$ 所对应的点 (x, y)．作为例子，在图 21 上画出了

$$\begin{aligned}(1 - z + 2z^2 - 25z^3 + 29z^4)g^2 \\ + (z - 22z^2 + 199z^3 - 210z^4)g \\ - (33z^3 - 594z^4) = 0\end{aligned} \qquad (6.2.6)$$

的对应点．将一直尺放在与水平轴重合的位置然后绕最小 g 轴点 P_0（图 21 上即为点(2,0)）作顺时针旋转，直至直尺通过网格的另一点 P_1，连接 P_0，与 P_1 作出一直线．过 P_1 由 P_1 水平指向铅直轴放置直尺，然后绕 P_1 点作顺时针旋转直至通过网格的另一点 P_2，连接 P_1，P_2，作出又一条直线．重复上述过程直至达到铅直的 z 轴．方程(6.2.6)的完全 Newton 图作在图 22 上．P_0P_1 连线与铅直 z 轴所夹锐角的正切确定了 μ 的第一个可能值，而 P_1P_2 连线与铅直 z 轴所夹锐角的正切确定了 μ 的第 2 个可能值，等等．对图 22 所示的 Newton 图，有



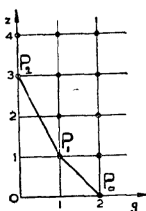


图 21　方程(6.2.6) Newton 图的点　　图 22　方程(6.2.6)的完全 Newton图

$\mu_1 = 1$ 与 $\mu_2 = 1/2$.

对一特定指数 μ_t，可以有几个逼近形式：

$$z_{it} \simeq c_{it} g^{\mu_t} \tag{6.2.7}$$

注意若 g 的某个根由 μ_t 定出，即 μ_t 是分数，则对应考虑的是主根．为了确定系数 c_{it}，必须在方程(6.2.3)的对应网格中，在直线 $P_{t-1}P_t$ 上的点的项中代入 $z = cg^{\mu_t}$，然后使其为零再去解结果方程．设方程(6.2.3)中有关项的和具有形式

$$\phi_{x_\sigma y_\sigma} g^{x_\sigma} z^{y_\sigma} + \cdots + \phi_{x_1 y_1} g^{x_1} z^{y_1} \tag{6.2.8}$$

其中 $y_\sigma > \cdots > y_1$，σ 系一正整数且小于系统无穷零点的数目．由于其项均对应在同一线上则可有

$$\frac{x_\sigma - x_1}{y_\sigma - y_1} = \frac{x_{\sigma-1} - x_1}{y_{\sigma-1} - y_1} = \cdots = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \mu_t$$

因此式(6.2.8)表达式的全部项由于用 $z = cg^{\mu_t}$ 的结果替换而成为相类似的，因此为确定系数 c_{it} 我们得到一个形如

$$\phi_{x_\sigma y_\sigma} c^{y_\sigma} + \cdots + \phi_{x_1 y_1} c^{y_1} = 0 \tag{6.2.9}$$

的方程或以 c^{y_1} 除之 ($c \neq 0$)，则有

$$\phi_{x_\sigma y_\sigma} c^{y_\sigma - y_1} + \cdots + \phi_{x_1 y_1} = 0 \tag{6.2.10}$$

它有 $y_\sigma - y_1$ 个解. 注意 $y_\sigma - y_1$ 是 P_t 与 P_{t-1} 纵坐标之差. 因此它应等于线段 $P_{t-1}P_t$ 在纵坐标轴上的投影. 由于它能使我们看到对应指数 μ_t 究竟有多少系数，因而这是有用的事实. 同样，最后一个线段达到铅直轴时的点的纵坐标将给出对考虑所有指数的所有近似系数的总数. 因此在最后线段上这一铅直轴点的纵坐标就是系统无穷零点的数目.

在得到方程 (6.2.7) 那样的近似后，由方程 (6.1.3) 与 (6.2.1)直到我们所需的形式

$$s_{it} \simeq b_{it} k^{a_t} \tag{6.2.11}$$

只是一个替换的简单过程，而这正是特征频率轨线对于 $k=\infty$时有 $s=\infty$的近似描述. 如果应用公式(6.1.9)我们就可以得到渐近线与正实轴间的夹角.

渐近线正如在第 6.2-1 节阐明的，将组成一个 Butterworth 结构. 每个模型均有公共的截距，它被 Kouvaritakis 和 Shaked [4] 称为“多变量枢点” (multivariable pivot)，他们也给出了对给定状态空间描述计算多变量枢点的办法. 在附录 6 中将阐明如何由特征方程 $\Delta(g, s)=0$ 推导出多变量枢点.

6.2-1 Butterworth 模型

在这一小节证明了闭环极点走向无穷远是沿着组成几个 Butterworth 结构的渐近线的. 证明是基于代数函数理论中已确立的结果[8].

考虑由方程(6.1.5)定义的闭环特征多项式，即

$$\Gamma(k, s) = 0 \tag{6.2.12}$$

其中允许 k 为复数. 设在 k_c 这一点由方程(6.2.12)定义的代数函数 $s(k)$ 具有 p——折迭根 s_c，设 $s(k)$在 k_c 的邻域N内的 n 个分支为 $\{s_i(k): i=1, 2, \cdots, p, \cdots, n\}$，其中 $\{s_i(k_c)= s_c: i=1, 2, \cdots, p\}$

设对分支 $\{s_i(k): i = p+1, \cdots, n\}$ 中任一个在N内围绕 k_c 进行解析开拓.并且我们围绕着临界点 k_c 对 $s_1(k)$ 解析开拓,则在一个绕圈以后我们得到函数 $\{s_i(k): i=2,3,\cdots,p\}$ 中的一个,例如 $s_2(k)$,而在另一个绕圈以后得到函数 $\{s_i(k): k=3,4,\cdots,p\}$ 中的一个,例如 $s_3(k)$. 在有限数 ν_1 个绕圈以后回到原来的函数 $s_1(k)$. 在这样的情况下将称函数

$$s_1(k), \cdots, s_{\nu_1}(k) \tag{6.2.13}$$

组成了代数函数 $s(k)$(在 k_c 的邻域N内)的分支的一循环系.

若 $\nu_1 < p$, 取函数 $s_{\nu_1+1}(k)$, 然后对它在N内围绕 k_c 进行解析开拓,重复上述做法. 得到第二个分支的循环系,记作

$$s_{\nu_1+1}(k), \cdots, s_{\nu_2}(k) \tag{6.2.14}$$

最后,所有函数 $s_1(k), \cdots, s_p(k)$ 均被收入循环系.

当 k 绕着多重点 k_c 转动时,每个循环系的函数按循环律依次转为另一个函数. 每个分支的循环系在 k_c 的邻域N定义一个解析函数,该解析函数在邻域N的点的值的数目等于考虑组成这个循环系的分支数. 若一个分支就组成一个循环系时,则对应的解析函数是单值的且恒等于该分支.

设邻域N是用 n 个这样的区域块堆起来的,函数 $\{s_i(k): i=1,2,\cdots,n\}$ 中的每一个都有一块,而且使第 i 页上的点表示为 $[k, s_i(k)]$ 对. 又设每个领域呈圆形且具有一径向由临界点至圆边界的割口,如图 23 所示. 则邻域可以沿这个割口的边进行连接,以便在第 i 页上围绕 k_c 进行解析开拓,第 j 个分支 $(j < p)$ 经过割口进入第 $(j+1)$ 页,$\cdots$重复下去显然又可回到第 i 页. 邻域的堆砌显然形成包含一页或多页的一些循环如图 24 所示,且每个循环是定义在 k_c 的邻域N上的解析函数的定义域.

为表述由一循环确定的解析函数,我们将采用罗马数标. 例如对应循环系统 $s_1(k), \cdots, s_{\nu_1}(k)$ 将用符号 $s_I(k)$ 表之.

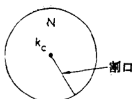


图 23　临界点 k_c 的邻域 N

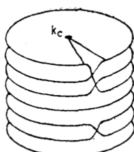


图 24　对临界点 k_c 的邻域的循环

当我们考虑特征频率轨线的渐近性质时，我们关心的是代数函数 $s(k)$ 的这样的分支：它当 k 趋于无穷时趋于无穷．如果对于 $k=\infty$ 我们有 p 个无穷分支，则按前面的讨论这 p 个分支将安排在几个循环系中．每个循环系由一解析函数确定，它的形式由下述定理给出 [8，p39]．

定理 4　代数函数 $s(k)$ 在其临界点 $k_c=\infty$ 的领域内构成一循环系的那些无穷分支在总体上组成一个由一形式级数

$$s_l = k^{\frac{\lambda}{\nu}}(b_0 + b_1 k^{-\frac{1}{\nu}} + b_2 k^{-\frac{2}{\nu}} + \cdots) \qquad (6.2.15)$$

给出的解析函数，其中 ν 是该循环中的分支数，λ 为一正整数．

于是在 $k=\infty$ 的邻域内对应一特定循环系的无穷分支，将可以近似地用

$$s_l(k) \simeq b_0 k^{\frac{\lambda}{\nu}} \qquad (6.2.16)$$

形式来表示．

特征频率轨线是 k 沿正实轴由 0 变至无穷时对应代数函数 $s(k)$ 的值．因而频率轨线的无穷分支将出现在能近似用式(6.2.16)表示的循环系统中． 在方程 (6.2.16) 中取 k 的 ν 个根，我们可以找到对应循环系的渐近线，它们自己被安排在一个 Butterworth 结构中，此即在复平面上有 ν 个用 $\left(\frac{360^\circ}{\nu}\right)$

角进行等分的渐近线.

一般说来正如已经讨论的那样，在 $k=\infty$ 的邻域内将存在几个分支的循环系，因此特征频率的渐近线将被安排在几个 Butterworth 结构之中.

6.3 出发角与抵达角

为了确定特征频率轨线的出发角与抵达角，我们需要得到轨线在系统的极点与有限零点那里的分支的近似式. 我们首先考虑由系统开环极点出发的角度.

设对于特征方程

$$\Phi(g,s)=0 \tag{6.3.1}$$

在 $s=\beta$ 处有一极点(或多重极点). 对于方程(6.3.1)可取 $s'=s-\beta$ 为新的独立变量，同时用 $g=d^{-1}$ 替换使方程(6.3.1)变成

$$\Phi(g,s)=\Phi(d^{-1},s'+\beta)=d^{-m}\Xi(d,s')=0 \tag{6.3.2}$$

我们正在考虑的情况现已化简为对应 $d=s'=0$ 的情形，而在 $s=\beta$ (β 本身排斥在外) 的邻域内方程 $\phi(g,s)=0$ 将等价于方程

$$\Xi(d,s')=\sum\xi_{xy}d^x s'^y=0,\ \xi_{00}=0 \tag{6.3.3}$$

若对方程 $\Xi(d,s')=0$ 构造 Newton 图，则得到一个形如

$$s'\simeq ed^{\omega} \tag{6.3.4}$$

的近似(或多重极点情况下的近似)，其中 e 为复数，ω 为有理实数. 由方程(6.1.3)，改变变量并作替换 $g=d^{-1}$，就得到了从极点 β 出发的特征频率轨线的一个分支或几个分支的近似，其形式为

$$s\simeq\beta+b_d k^{\mu_d} \tag{6.3.5}$$

若现在应用公式(6.1.9)，则出发角为

$$\theta_d = \text{辐角}\ \{b_d\} \tag{6.3.6}$$

现在我们将考虑到达系统有限零点的角度. 设特征方程(6.3.1)有一零点(或多重零点)在 $s=\gamma$ 处. 取 $s'=s-\gamma$ 为新变量,于是方程变为

$$\Phi(g,s)=\Phi(g,s'+\gamma)=\chi(g,s')=0 \tag{6.3.7}$$

这样考虑的情况简化至 $g=s'=0$ 的情形. 而在 $s=\gamma$ 的邻域(γ 本身排斥在外)内方程 $\Phi(g,s)=0$ 等价于方程

$$\chi(g,s')=\sum x_{xy}g^x s'^y=0,\ x_{00}=0 \tag{6.3.8}$$

如果对方程(6.3.8)构造 Newton 图,一个形如

$$s'\simeq pg^{\eta} \tag{6.3.9}$$

的近似就得到了,其中 p 是复数,η 是有理实数. 由方程(6.1.3)与变量改变,我们就得到了抵达零点 $s=\gamma$ 的特征频率轨线的一个分支或几个分支的一个近似,其形式为

$$s\simeq\gamma+b_a k^{\mu_a} \tag{6.3.10}$$

如果现在应用公式(6.1.9),则抵达角 θ_a 为

$$\theta_a=\text{辐角}\{b_a\}\pm180^\circ \tag{6.3.11}$$

注意 μ_i 将总是负的,因而在公式(6.3.11)中出现 180° 这一项. 同样要注意的是这一抵达角的定义与通常的定义相差 180°,后一定义是站在零点去看轨线到达时才可看到的方向.

6.4 例 1

考虑开环增益矩阵:

$$G(s)=\frac{1}{s^4+5s^3-2s^2-44s+40}\times\begin{bmatrix}3s^3+4s^2-156s+464 & 8s^2-24s+16\\ s^3+79s^2+44s-868 & -4s^3-4s^2+40s-32\end{bmatrix}$$

它的特征方程为

$$\Phi(g,s) = (s^4 + 5s^3 - 2s^2 - 44s + 40)g^2$$
$$+ (s^3 + 116s - 432)g - 12(s^2 - 2s + 2) = 0$$

(i) 确定渐近性质

在特征方程中设 $s = z^{-1}$，则得到

$$\Psi(g, z) = (1 + 5z - 2z^2 - 44z^3 + 40z^4)g^2$$
$$+ (z + 116z^3 - 432z^4)g$$
$$- 12(z^2 - 2z^3 + 2z^4) = 0$$

$\Psi(g, z)$ 的 Newton 图画在图 25 上，由此可知 $\mu = 1$，于是近似为

$$z \simeq cg$$

算出系数 c 具有两个值 $-\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{3}$（用第 6.2 节的办法）．因此对 z 进行回代并且 $g = -k^{-1}$，则对特征频率轨线可求得下述近似：

$$s \simeq 4k \text{ 与 } s \simeq -3k,$$
$$\text{当 } k \to \infty$$

因此特征频率轨线的两分支以对正实轴的角度 0° 与 180° 走向无穷．

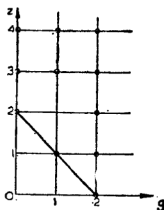


图 25 $\Psi(g, z)$ 的 Newton 图

(ii) 求出发角

系统有四个开环极点

$$s = 1,\ s = 2,\ s = -4 + 2j$$
$$\text{与 } s = -4 - 2j$$

在极点 $s = 1$ 处

在特征方程中令 $s' = s - 1$ 与 $g = d^{-1}$，则有

$$\Xi_1(d, s') = (s'^4 + gs'^3 + 1gs'^2 - 2gs')$$
$$+ (s'^3 + 3s'^2 + 11gs' - 315)d$$
$$- 12(s'^2 + 1)d^2 = 0$$

$\Xi_1(d, s')$ 的 Newton 图画在图 26 上，由此可有 $\omega_1 = 1$，因而近似为

$$s' \simeq e_1 d$$

系数 e_1 经算出为 -10.86（用第 6.2 节的方法），最后特征频率轨线在极点 $s = 1$ 周围的近似为

$$s \simeq 1 + 10.86k$$

因此在极点 $s = 1$ 的出发角为 0°.

在极点 $s = 2$ 处

在特征方程中令 $s' = s - 2$ 与 $g = d^{-1}$，则有

$$\Xi_2(d, s') = (s'^4 + 13s'^3 + 52s'^2 + 40s')$$

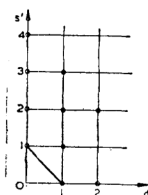


图 26 对 $\Xi_1(d, s')$ 的 Newton 图

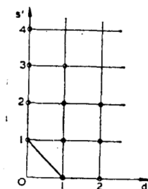


图 27 对 $\Xi_2(d, s')$ 的 Newton 图

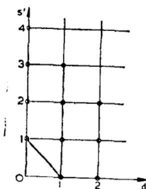


图 28 对 $\Xi_3(d, s')$ 的 Newton 图

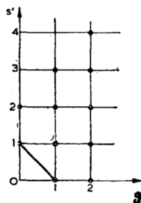


图 29 对 $X(g, s')$ 的 Newton 图

$$+ (s'^3 + 6s'^2 + 128s' - 192)d - 12(s'^2 + 2s' + 2)d^2 = 0$$

$E_2(d, s')$ 的 Newton 图画在图 27 上，由此可有 $\omega_2 = 1$，因而近似为

$$s' \simeq e_2 d$$

系数 e_2 算出为 4.8，最后特征频率轨线在极点 $s = 2$ 的周围具有下述近似：

$$s \simeq 2 - 4.8k$$

从而由极点 $s = 2$ 的出发角是 180°.

在极点 $s = -4 + 2j$ 处

在特征方程中令 $s' = s + 4 - 2j$ 与 $g = d^{-1}$，则有

$$\begin{aligned}E_3(d, s') = &[s'^4 + (-11 + j8)s'^3 \\ &+ (10 - j60)s'^2 + (88 + j104)s'] \\ &+ [s'^3 + (-12 + j6)s'^2 + (152 - j48)s' \\ &+ (-912 + j320)]d - 12[s'^2 + (-10 + j4)s' \\ &+ (22 - j20)]d^2 = 0\end{aligned}$$

$E_3(d, s')$ 的 Newton 图画在图 28 上，由它可知 $\omega_3 = 1$，从而近似为

$$s' \simeq e_3 d$$

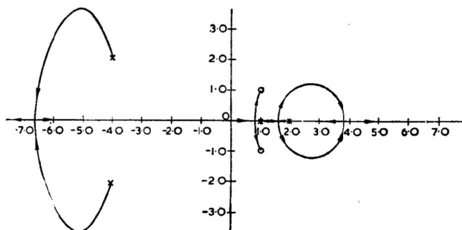


图 30 完全特征频率轨线

系数 e. 算出是

$$\frac{912 - j320}{88 + j104}$$

最后特征频率轨线在极点 $-4+2j$ 周围具有下述近似:

$$s \simeq -4 + 2j + \frac{(-912 + j320)}{(88 + j104)} k$$

因而由 $s = -4 + 2j$ 这一极点的出发角是

$$\text{辐角} \left(\frac{-912 + j320}{88 + j104}\right) = 110.9°$$

在极点 $s = -4 - 2j$ 处

应用对称性,由极点 $s = -4 - 2j$ 的出发角是 $-110.9°$.

(iii) 求抵达角

系统具有两个有限零点

$$s = 1 + j \quad 与 \quad s = 1 - j$$

在零点 $s = 1 + j$ 处

在特征方程中令 $s' = s - 1 - j$, 则有

$$\begin{aligned} \chi(g, s') = {} & [s'^4 + 19 + j4)s'^3 + (13 + j29)s'^2 \\ & + (-58 + j46)s' + (-18 - j38)]g^2 \\ & + [s'^3 + (3 + j3)s'^2 + (116 + j8)s' \\ & + (-318 + j118)]g - 12[s'^2 + j2s'] \\ & = 0 \end{aligned}$$

$\chi(g, s')$ 的 Newton 图如图 29 所示, 由此有 $\eta = 1$ 且近似为

$$s' \simeq pg$$

系数 p 经计算为

$$\frac{-318 + j118}{j24}$$

最后特征频率轨线在零点 $s = 1 + j$ 周围的近似为

$$s \simeq 1 + j + \frac{(318 - j118)}{j24} k^{-1}$$

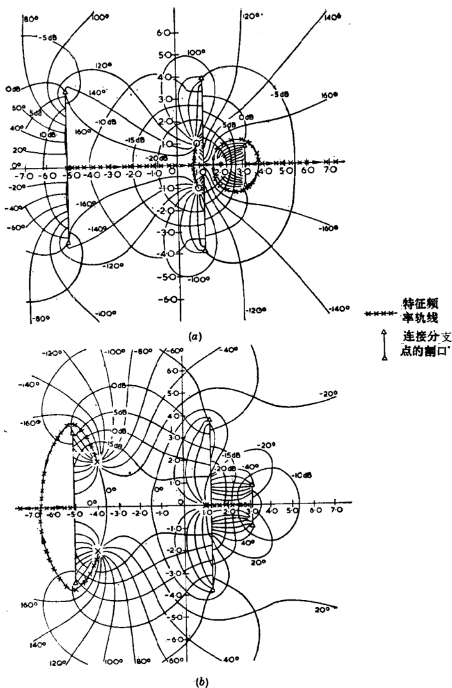


图 31 频率曲面（a）第 1 页；（b）第 2 页

因此对零点 $s=1+j$ 的抵达角是

$$\text{辐角}\left(\frac{318-j118}{j24}\right)\pm 180^\circ = 69.64^\circ$$

在零点 $s=1-j$ 处

由对称性得零点 $s=1-j$ 的抵达角是 -69.64°

为了核对结果，把完全的特征频率轨线投影在单一复平面上并画在图 30 上．轨线的分支在极点 $s=1$ 附近重合造成对闭环极点运动理解上的困难．用 $g(s)$ 的常位相与常辐值曲线描画了的频率曲面表示在图 31(a), (b) 上，以给出特征频率轨线的清楚的表述．极点 $s=-4+2j$ 与零点 $s=1+j$ 处邻域内的小区域画在图 32 与 33 上，以验证计算的出发角与抵达角．

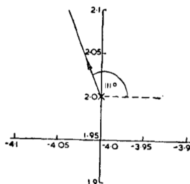


图 32　由极点 $s=-4+2j$ 的出发角

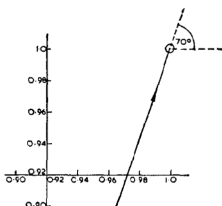


图 33　到零点 $s=1+j$ 的抵达角

6.5　最优闭环极点的渐近性质

在这一节"Newton 图"方法被用来确定多变量时不变线性调节器的最优闭环极点在品质指标中控制项权趋于零时的渐近性质．其方法是基于最优特征频率轨线与合适的代数函

数分支之间的联系的．虽然这一方法等价于Kwakernaak[11]的办法，但在应用代数函数理论以后该方法的简单性就得以突出了．

考虑可镇定又可检测的时不变线性系统：

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{6.5.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{6.5.2}$$

与品质指标

$$V(\infty) = \int_0^\infty [y^T(t)Qy(t) + \rho u^T(t)Ru(t)]dt \tag{6.5.3}$$

其中Q与R为正定对称矩阵.符号T表示矩阵或向量的转置．于是熟知的最优控制作用是

$$u(t) = -\frac{1}{\rho} R^{-1}B^TPx(t) \tag{6.5.4}$$

其中P系静态矩阵 Riccati 方程

$$-PA - A^TP + \frac{1}{\rho} PBR^{-1}B^TP = C^TQC \tag{6.5.5}$$

的唯一半正定解．

Kwakernaak [11,方程(16)]求得最优调节器下闭环特征多项式（用$\varnothing_c(s)$表示）与开环特征多项式（用$\varnothing_0(s)$表示）之间的关系是

$$\varnothing_c(s)\varnothing_c(-s) = \varnothing_0(s)\varnothing_0(-s)\det\left[I_m + \frac{1}{\rho} R^{-1}G^T(-s)QG(s)\right] \tag{6.5.6}$$

其中I_m为m阶单位矩阵，m为系统输入个数，而且

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{6.5.7}$$

是系统的开环传递函数或增益矩阵．由式(6.5.6)明显看出，最优闭环系统的极点依赖于输入权，其在左半平面的s值应

满足

$$\det\left[I_m + \frac{1}{\rho}H(s)\right] = 0 \qquad (6.5.8)$$

其中

$$H(s) \triangleq R^{-1}G^T(-s)QG(s) \qquad (6.5.9)$$

现考虑确定 $H(s)$ 特征值的特征方程，它是

$$\Delta(\eta, s) \triangleq \det[\eta I_m - H(s)] = 0 \qquad (6.5.10)$$

或用展开行列式得

$$\Delta(\eta, s) = \eta^m + a_1(s^2)\eta^{m-1} + \cdots + a_m(s^2) = 0 \qquad (6.5.11)$$

其中系数 $\{a_i(s^2): i = 1, 2, \cdots, m\}$ 是 s^2 的有理函数. 系数是 s^2 的函数的理由是

$$\begin{aligned}\Delta(\eta, s) &= \det[\eta I_m - R^{-1}G^T(-s)QG(s)] \\ &= \det[\eta I_m - R^{-\frac{1}{2}}G^T(-s)QG(s)R^{-\frac{1}{2}}]\end{aligned} \qquad (6.5.12)$$

而且 $R^{-\frac{1}{2}}G^T(-s)QG(s)R^{-\frac{1}{2}}$ 是平行 Hermite 矩阵就能推知 $\Delta(\eta, s) = \Delta(\eta, -s)$[11,附录 A]，而这必然发生在系数是 s^2 的有理函数时.

若 $b_0(s^2)$ 是系数 $\{a_i(s^2): i = 1, 2, \cdots, m\}$ 的最小公分母，则曰式(6.5.11)有

$$b_0(s^2)\Delta(\eta, s) = b_0(s^2)\eta^m + b_1(s^2)\eta^{m-1} + \cdots + b_m(s^2) = 0 \qquad (6.5.13)$$

其中系数 $\{b_i(s^2): i = 1, 2, \cdots, m\}$ 是 s^2 的多项式. 由式(6.5.13) 定义的复变函数 $\eta(s)$ 是一代数函数. 一般讲，式(6.5.11)与(6.5.13)可以分解成在 s 的有理函数域上的几个不可约方程，因此定义了一代数函数集合. 但是，为了表达简单，将假设式(6.5.11)与(6.5.13)均为在 s 的有理函数域上不可约.

如果我们比较式(6.5.8)与(6.5.10)，则最优闭环极点能由方程

$$\eta(s) = -\rho \tag{6.5.14}$$

的左半平面解确定，即最优特征频率轨线是代数函数在左半平面的180°等位相曲线.若将 ρ 考虑为复变量且在式(6.5.13)中替换 $\eta(s)$，则有

$$b_0(s^2)(-\rho)^m + b_1(s^2)(-\rho)^{m-1} + \cdots + b_m(s^2) = 0 \tag{6.5.15}$$

它是一个用来确定代数函数 $s(\rho)$ 与 $\rho(s)$ 的代数方程.对代数函数 $s(\rho)$，当 ρ 为正实数时其在左半平面的分支即为最优特征频率轨线[注意方程(6.5.15)也可由方程(6.5.8)直接推得].

为了确定最优特征频率轨线的渐近性质，需要给出代数函数 $s(\rho)$ 在 $s=\infty$ 的邻域内当 ρ 趋于零时其分支的近似. 这可作为对 $s(\rho)$ 的分支在点 $s=\infty$ 周围当 ρ 趋于零时的级数展开的首项来求得. 为此目的在方程(6.5.15)中令 $s=z^{-1}$ 并且作第 6.2 节中所做的工作.

6.6 例 2

为了阐明上述过程,对

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \times \begin{bmatrix} s+2 & 6 \\ s+3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = I$$

与

$$\rho R = \rho I$$

计算最优闭环极点的渐近性质. 从这些数据我们有

$$H(s) \triangleq R^{-1}G^T(-s)QG(s) = \frac{1}{(s^2-1)(s^2-4)(s^2-9)(s^2-16)}$$

$$\times\begin{bmatrix}-2s^2+13 & -7s+15 \\ 7s+15 & 37\end{bmatrix}^{*)}$$

因而

$$\begin{aligned}\Delta(\eta, s) &\triangleq \det[\eta I_2 - H(s)] \\ &= \eta^2 - \frac{(-2s^2+50)\eta}{(s^2-1)(s^2-4)(s^2-9)(s^2-16)} \\ &\quad + \frac{(-25s^2+256)}{(s^2-1)^2(s^2-4)^2(s^2-9)^2(s^2-16)^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

若现在替换 $\eta = -\rho$ 且乘其系数的最小公分母则有

$$\begin{aligned}&(s^2-1)^2(s^2-4)^2(s^2-9)^2(s^2-16)^2\rho^2 \\ &\quad + (s^2-1)(s^2-4)(s^2-9)(s^2-16) \\ &\quad \times (-2s^2+50)\rho + (-25s^2+256) = 0\end{aligned}$$

用 $s = z^{-1}$ 替换，则有

$$\begin{aligned}&(1-z^2)^2(1-4z^2)^2(1-9z^2)^2(1-16z^2)^2\rho^2 \\ &\quad + z^6(1-z^2)(1-4z^2)(1-9z^2) \\ &\quad \times (1-16z^2)(-2+50z^2)\rho \\ &\quad + z^{14}(-25+256z^2) = 0\end{aligned}$$

这最后一个方程的 Newton 图表示在图 34 上，由此有

$\mu_1 = \dfrac{1}{6}$， $\mu_2 = \dfrac{1}{8}$，因而近似为 $z \simeq e_1\rho^{\frac{1}{6}}$ 与 $z \simeq e_2\rho^{\frac{1}{8}}$.

为求 e_1 之值，用 $z = e_1\rho^{\frac{1}{6}}$ 代入，

$$\rho^2 - 2z^6\rho = 0 \begin{cases}\text{即对应 Newton 图上在第一个} \\ \text{线段上的点的项等于零}\end{cases}$$

就可得 $e_1 = \sqrt[6]{0.5} = 0.891\exp\dfrac{j2k\pi}{6}$; $k = 0, 1, 2, \cdots, 5$.

---

*) 此处分母原书为 $(s^2-1)(s^2-2)(s^2-3)(s^2-4)$ 系错的，随后的式子因由此导出亦错，但这些并不影响 Newton 图及近似分析. ——译者注

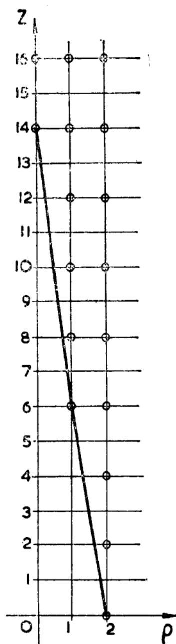
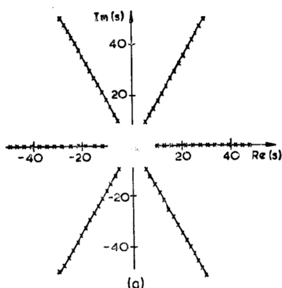


图 34 Newton 图



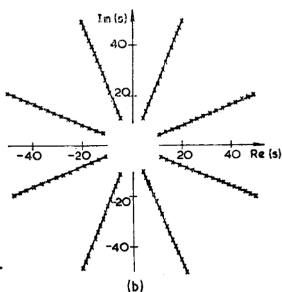


图 35 画在 $\eta(s)$ 的 Riemann 曲面上的最优特征频率轨线(加上右半平面的象)的渐近性质

(a) 曲面的第 1 页;

(b) 曲面的第 2 页

若用 $z = e_2 \rho^{\frac{1}{8}}$ 代入，

$$-25z^{14} - 2z^6\rho = 0 \begin{cases} \text{即对应 Newton 图上在第二个} \\ \text{线段上的点的项等于零} \end{cases}$$

就可得

$$e_2 = \sqrt[8]{-0.08} = 0.729 \exp \frac{j(\pi + 2k\pi)}{8}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 7$$

如果再替换回 s 且仅取左半平面解，就可得到下述对最优特征频率轨线渐近性质的表达式：

$$s \simeq 1.12 \left[\exp\left(j \frac{k\pi}{3}\right)\right] \rho^{-\frac{1}{6}};\ k = 2, 3, 4$$

与

$$s \simeq 1.37 \left[\exp j\left(\frac{\pi + 2k\pi}{8}\right)\right] \rho^{-\frac{1}{8}};\ k = 2, 3, 4, 5$$

注意应用 Kwakernaak 的表示法 [11]，上述这些就确定了 3 阶与 4 阶的 Butterworth 模型．最优特征频率轨线和它们的右半平面的象表示在图 35 中．注意它们已作为代数函数 $\eta(s)$ 的 180° 等位相线描画在它的 Riemann 曲面区域上．

参 考 文 献

[1] W. R. Evans, "Graphical Analysis of Control Systems", Trans. AIEE, 67, 547—551, 1948.

[2] W. R. Evans, "Control System Synthesis by Root Locus Method", Trans. AIEE, 69, 1—4, 1950.

[3] W. R. Evans, "Control System Dymamics", McGraw-Hill, New York, 1954.

[4] B. Kouvaritakis, and U. Shaked, "Asymptotic behaviour of root-loci of multivariable systems", Int. J. Control, 23, 297—340. 1976.

[5] D. H. Owens, "A note on series expansions for multivariable root-loci", Int. J. Control, 26, 549—557, 1977.

[6] U. Shaked, "The angles of departure and approach of the root-

loci in linear multivariable systems", Int. J. Control, 23, 445—457, 1976.

[7] G. A. Bliss, "Algebraic Functions", Dover, New York, 1966 (reprint of 1933 original).

[8] B. A. Fuchs, and V. I. Levin, "Functions of a Complex Variable", International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, 1961 (translation of 1951 Russian original).

[9] E. Hille, "Analytic Function Theory", Vol. 2, Ginn and Co., U. S. A., 1962.

[10] I. Postlethwaite, "A note on the characteristic frequency loci of multivariable linear optimal regulators", IEEE Trans. Automatic Control, 23, 757—760, 1978.

[11] H. Kwakernaak, "Asymptotic Root Loci of Multivariable Linear Optimal Regulators", IEEE Trans. Automatic Control, 21, 378—382, 1976.

[12] A. G. J. MacFarlane, "Dual-system methods in dynamical analysis Pt. 2-Optimal regulators and optimal servo-mechanisms", Proc. IEE, 1458—1462, 1969.

第七章　参数稳定性与进一步的研究

如果一反馈系统的全部闭环极点都位于左半平面，则该系统就称为稳定．控制系统的稳定性是依赖于其所联系的一些参数的．有时在控制系统中由于可能出现的老化、损坏与变质等使参数的值是不确定的，在另些时候，为了经济的理由又可能希望去改变参数值．在这样两种情形下预测关于给定参数的系统的相对稳定性是很有用的．

在前几章一个占优势的论题是系统与两个代数函数集合——特征增益函数与特征频率函数的联系．在这一章引入了特征参数函数并且将它用来发展参数根轨迹与参数Nyquist轨线的思想．由此系统关于单个参数的相对稳定性就可得以确定．

本章的最后一节，是为进一步的研究提出的意见和建议．

7.1　特征频率与特征参数函数

考虑的反馈结构如图 36 所示，其中 $A(k_2, k_3, \cdots, k_q)$，$B(k_2, k_3, \cdots, k_q)$，$C(k_2, k_3, \cdots, k_q)$ 与 $D(k_2, k_3, \cdots, k_q)$ 是状态空间矩阵，它们依赖于 $(q-1)$ 个实的时不变参数而 k_1 是标量时不变增益参数为整个回路所共有．

这个结构的闭环极点是方程

$$\det[sI_n - S(k)] = 0 \qquad (7.1.1)$$

的解，其中

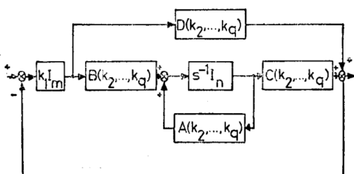


图 36　为进行参数分析的反馈结构

$$S(k) \triangleq A[k_2, \cdots, k_q] - B[k_2, \cdots, k_q]$$
$$\times [k_1^{-1} I_m + D(k_2, \cdots, k_q)]^{-1} C(k_2, \cdots, k_q)$$

是闭环频率矩阵(参见第 3.1 节). 如果除 k_i 外的所有参数的数值均已代入方程(7.1.1),而将 k_i 考虑成一复变量，则最后的代数方程(为简单起见将认为它是不可约的)将确定一对代数函数 $s(k_i)$ 与 $k_i(s)$. 代数函数 $s(k_i)$ 称为关于 k_i 的**特征频率函数**,而代数函数 $k_i(s)$ 为对 k_i 的**特征参数函数**.(注意,在第三章引进的特征频率函数 $s(g)$ 与特征增益函数 $g(s)$，它们对应地等价于 $s(-k_1^{-1})$ 和— $k_1(s)^{-1}$.)

$s(k_i)$ 的分支在 k_i 取实值时清楚地决定闭环极点相对 k_i 的变化,因此就称为**参数根轨迹**. 换言之,参数根轨迹可看作是在 $k_i(s)$ 的频率曲面区域上 $k_i(s)$ 的 0° 等位相曲线.

与参数根轨线相对偶的是**参数 Nyquist 轨线**或**特征参数轨线**，它是 $k_i(s)$ 的分支在 s 走过虚轴描画的轨迹. 换言之，特征参数轨线可看作是在 $s(k_i)$ 的 Riemann 曲面定义域上 $s(k_i)$ 的 ±90°等位相回线，该 Riemann 曲面称为对 k_i 的**参数曲面**.

如果对一特定系统,对于系统的参数有一名义值的集合,则我们可以用察看参数曲面的办法来确定任何相对稳定性是

灵敏的参数.为帮助这一评定，引进了增益与位相裕度的推广.

7.2 增益与位相裕度

在k_i的参数曲面上$s(k_i)$的 $\pm 90°$ 等位相回线示出了稳定的与不稳定的闭环极点间的边界，由此我们就能确定一个稳定工作点$\mathring{k}_i$对k_i的参数增益与位相裕度，它给出系统关于k_i的相对稳定性的一种测量.

参数增益裕度 参数增益裕度是相对于稳定工作点$\mathring{k}_i$，定义为使系统成为不稳定所要求的在参数增益上的最小改变. 令d_i是沿着实轴由一稳定工作点$\mathring{k}_i$到k_i的第i页参数曲面上稳定性边界(特征参数轨线)的最小距离. 于是参数增益裕度定义为

$$\min_i\{d_i : i=1,2,\cdots,n\}$$

参数位相裕度 在k_i的n页参数曲面的每一页上，想象作一弧线，其圆心在原点，起点在稳定工作点$\mathring{k}_i$，另一端达到稳定性边界(特征参数轨线). 令ϕ_i是在原点上述第i页上弧对应的中心角，则参数位相裕度定义为

$$\min_i\{\phi_i : i=1,2,\cdots,n\}$$

7.3 例

在这节考虑一倒摆位置系统(见图 37)，并分析相对于其单参数车质量的系统的稳定性.

这个系统同样被 Kwakernaak 与 Sivan [2], Cannon [3] 与 Elgerd[4] 利用过. 系统可采用下述线性状态微分方程模式[2]:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{L'} & 0 & \frac{g}{L'} & 0 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (7.3.1)$$

其中 $u(t)$ 是小马达在车上产生的作用力，M 为车子质量，F 为联系到车运动的摩擦系数；而 L' 给定为

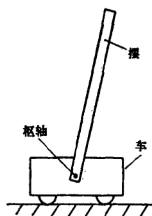


图 37　倒摆位置系统

$$L'=\frac{J+mL^2}{mL} \quad (7.3.2)$$

其中 m 为摆的质量，L 为由枢轴点至摆的重心间的距离，而 J 是摆相对重心的惯性矩.

应用形如

$$u(t)=-Kx(t) \quad (7.3.3)$$

的反馈系统是能稳定的. 若取数值

$$\begin{aligned} \frac{F}{M} &= 1\,\mathrm{s}^{-1} \\ \frac{1}{M} &= 1\,\mathrm{kg}^{-1} \\ \frac{g}{L'} &= 11.65\,\mathrm{s}^{-2} \\ L' &= 0.842\mathrm{m} \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

可知[2]

$$K=[86.81,\ 12.21,\ -118.4,\ -33.44] \quad (7.3.5)$$

可镇定线性化系统且使闭环极点为 $-4.706 \pm j1.382$ 与 $-1.902 \pm j3.420$.

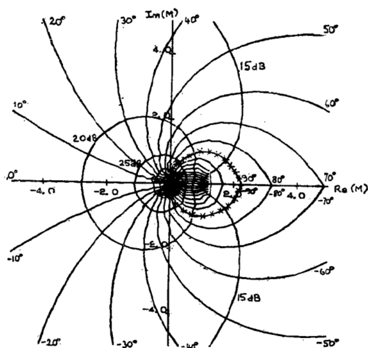


图 38　第 1 页参数(质量)曲面

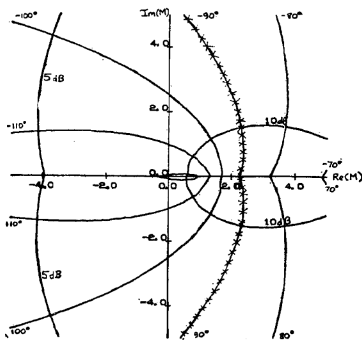


图 39　第 2 页参数(质量)曲面

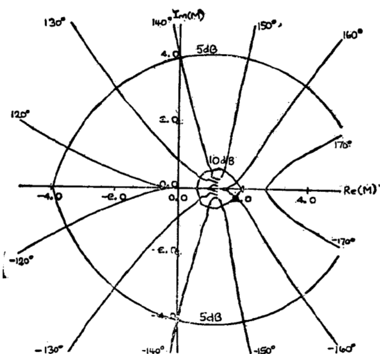


图 40　第 3 页参数(质量)曲面

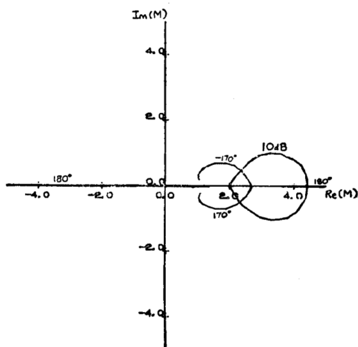


图 41　第 4 页参数(质量)曲面

现在来研究M的参数曲面看看小车质量在稳定工作点1kg 周围其质量的改变是如何影响系统稳定性的. 四页质量曲面(如图 38—41) 上画好了 $s(M)$ 的常位相与常辐值曲线. 由此可以得到下述稳定性裕度:

参数(质量)增益裕度 = 1kg

参数(质量)位相裕度 = 60°

1kg 的增益裕度对应车质量减少至零仍保持稳定性. 参数曲面同样表明对稳定性说来车的最大质量为 2.125kg. 60°的位相裕度指出闭环系统有充分的阻尼.

7.4 进一步的研究

可以想到一个系统在其正常工作时有一个参数承受大变化的情况下，在为该系统而用的参数相关控制器的设计中参数曲面可能是相当有用的. 例如,对飞机引擎的控制器说来,就要求在相当广的高度范围内合适地工作. 一个可能的设计方案可以是

(i) 在一特定高度上设计一实常数控制器.

(ii) 用"矩阵插值"手法求得一高度相关控制器.

(iii) 应用"高度曲面"分析在整个工作范围内系统的稳定性.

如同在本章所指出的，在这一书中所提出的方法不仅可应用于增益与频率,而且可用于任何单一的系统参数与频率. 要获得多于一个参数改变下的稳定性判据是一个复杂的问题,但却有很大的实际意义,可以感到从多复变函数论的研究中可能会有有价值的看法.

在最近几年里对二维及多维数值滤波器中稳定性检验得到了发展[5],二维数值滤波器正广泛地应用于各领域; 例如

求象过程、地震过程的地球物理学，重力与磁性资料．可以期望高维滤波器同样可以找到应用的领域：例如全息三维滤波．由用 Nyquist 方式表现出来的稳定性判据可以想到这些发展经过控制工程师的更深刻的理解可以为在控制领域内的应用得到合适的改进．例如可能在多参数变化下稳定性的研究中得到应用．

贯串这一工作的经常性的论题是多变量系统与一个或可能多个定义在合适的 Riemann 曲面上代数函数之间的联系．对一代数函数而言 Riemann 曲面是拓扑等价于具环柄的球，而环柄的数目是当作曲面的亏格数来理解的 [6]．亏格数可以证明是系统的一个重要特征，它可能与解耦有关，即变换多变量系统到一个系统，实际上它是一单输入单输出系统的集合．一单输入单输出系统有一对应零亏格的显然(一页)频率曲面．所以解耦多变量系统将等价于化简一个具亏格数大于或等于零的 m 页 Riemann 曲面到 m 个显然 Riemann 曲面(具有亏格数零)的集合．于是在分支点奇异性(它的性质和位置确定如同亏格数一样的拓扑性质) 与解耦之间的关系将可能是一成效显著的研究路线．在附录 7 上发展了一个有兴趣的关系，它表明在增益曲面上的一个分支点对应一个在对应频率曲面上的分支点或驻定点，而反过来也对．

参 考 文 献

[1] G. A. Bliss, "Algebraic Functions", Dover, New York, 1966 (reprint of 1933 original).

[2] H. Kwakernaak, and R. Sivan, "Linear Optimal Control Systems", Wiley, New York, 1972.

[3] R. H. Cannon, Jr, "Dynamics of Physical Systems", McGraw-Hill, New York, 1967.

[4] O. I. Elgerd, "Control Systems Theory", McGraw-Hill, New York,

1967.
[5] E. I. Jury, "Inners and Stability of Dynamical Systems", Wiley, New York, 1974.
[6] G. Springer, "Introduction to Riemann Surfaces", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

附　录

1　代数函数的定义

令 $\Lambda(q, v)$ 是 q 的形如

$$\Lambda(q,v) = f_0(v)q^m + f_1(v)q^{m-1} + \cdots + f_m(v) \quad (A1.1)$$

的多项式,其中每个系数 $\{f_i(v): i = 0, 1, \cdots, m\}$ 本身是 v 的复系数多项式. 则一定义在复 v 平面上的函数 $q(v)$, 它满足形如

$$\Lambda(q,v) = 0 \quad (A1.2)$$

的方程,$q(v)$ 就是一代数函数. 多项式 $\Lambda(q, v)$ 也可写成具有系数为 q 的多项式的 v 的多项式. 若按此考虑,式(A1.2)也定义一代数函数 $v(q)$.

对于 v 的一确定值 v_0, 方程(A 1.2)有 m 个解称为 $q(v)$ 的分支,且在 v_0 的邻域内分支可用幂级数展开表示[1].

在上述定义中均假设 $\Lambda(q, v)$ 是在 (q, v) 上的不可约多项式,即 $\Lambda(q, v)$ 不是两个或多个 (q, v) 的多项式的乘积. 若 $\Lambda(q, v)$ 是 t 个 (q, v) 多项式的乘积,则方程(A1.2)将定义 t 个形如 $q(v)$ 的代数函数, 或定义 t 个形如 $v(q)$ 的代数函数.

2　化简至不可约有理正则型

在本附录中给出一个方法以化简 m 阶方阵至其有理正则型. 给出的方法与 Ayres 从方阵求有理正则型的办法略有区别. 方阵 G 的有理正则型, 除其对角线块对应 $gI-G$ 的不变

因子而不是不可约因子外将与不可约型相似. 由 Ayres 给出的为寻求有理正则型的办法以及某些必要的定义将在下面给出.

定义 若向量

$$X, GX, G^2X, \cdots, G^{t-1}X \tag{A2.1}$$

是线性无关的,但

$$X, GX, G^2X, \cdots, G^{t-1}X, G^tX \tag{A2.2}$$

不是,则式(A2.1)称为具有X为首,长度为t的一个链.

方法 对给定任一域F上的m阶方阵G

(i) 令 X_m 是对F上所有m维向量说来，具有最大长度链C_m的首;

(ii) 令 X_{m-1}是具有最大长度链 C_{m-1}的首（该链的元与前述 C_m 的元线性独立),X_{m-1}是在与 C_m 的向量线性独立的所有F上,m维向量中选取的;

(iii) 令 X_{m-2}是最大长度链 C_{m-2}的首(该链的任何元均线性独立于前述 C_m 与 C_{m-1} 的元), X_{m-2} 是在与 C_m 和 C_{m-1} 的向量线性独立的所有F上,m维向量中选取的;

如此等等. 于是对

$$E = [X_j, GX_j, \cdots, G^{t_j-1}X_j; X_{j+1}, GX_{j+1}, \cdots, G^{t_{j+1}-1}X_{j+1}; \cdots; X_m, GX_m, \cdots, G^{t_m-1}X_m]$$

就有 $E^{-1}GE$ 是G的有理正则型.

在这一方法中，最大长度链是被用来寻求不变因子的. 现在不变因子已经由不可约有理正则型所要求的不可约特征方程的乘积中产生. 因此如果寻求最小长度链代替最大长度链,这样形成的变换矩阵E就可以给出不可约有理正则型.

上述方法的问题在于没法指出给定什么就能确知什么时候一个链有最大或最小的长度. 此外在相反情况下将出现较长与较短的链.

指出最大或最小长度的链刚好组成G不变子空间中最大或最小子空间的基这一点是有益的. 因此找最小长度链就等价于找最小的不变子空间. 同样可以发生的是刚好一维不变子空间（特征向量）对应一特征值以及t维不变子空间(从具最小长度中寻求)对应一确定t个特征值的t次不可约方程.

例 求

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{(s+3)}{(s+1)^3} & \dfrac{(s+2)}{(s+1)^2} & 0\\ \dfrac{(s-3)}{(s+1)^2} & \dfrac{-2}{(s+1)^2} & 0\\ \dfrac{-1}{(s+1)^2} & \dfrac{-(s+2)}{2(s+1)^2} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

的不可约正则型. 令 $X=[0\ 0\ 1]^T$, 其中T表示转置, $GX=\dfrac{1}{(s+1)}X$, 因而X是一具有最小长度的链.

令 $Y=[0\ 1\ 0]^T$, 则

$$GY=\left[\frac{s+2}{(s+1)^2}\ \ \frac{-2}{(s+1)^2}\ \ \frac{-(s+2)}{2(s+1)^2}\right]^T$$

与

$$G^2Y=\left[\frac{s+2}{(s+1)^3}\ \ \frac{s-2}{(s+1)^3}\ \ \frac{-(s+2)}{2(s+1)^3}\right]^T$$

$$=\frac{1}{s+1}GY+\frac{s}{(s+1)^3}Y$$

由于不能再找到较小长度的链,因此 Y, GY 构成一最小长度链的集. 从而变换矩阵 $E(s)$ 可取为

$$E(s)=[X\ Y\ G\ Y]=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{s+2}{(s+1)^2}\\ 0 & 1 & \dfrac{-2}{(s+1)^2}\\ 1 & 0 & \dfrac{-(s+2)}{2(s+1)^2}\end{bmatrix}$$

且

$$Q(s)=E^{-1}(s)G(s)E(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{s}{(s+1)^3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{(s+1)}\end{bmatrix}$$

由此推出不可约特征方程是

$$\Delta_1(g,s)=g-\frac{1}{s+1}$$

$$\Delta_2(g,s)=g^2-\frac{1}{s+1}g-\frac{s}{(s+1)^3}$$

注意由在寻求最小长度链时得到的相关关系. 同样是明显的.

3 判 别 式

在本附录中,对给定的方程

$\Phi(g,s)=b_0(s)g^t+b_1(s)g^{t-1}+\cdots+b_t(s)=0$

给出了两个寻求其判别式的方法.

方法 1 (Barnett [3])

给定两个多项式:

$$a(g)=a_0g^n+a_1g^{n-1}+\cdots+a_n$$
$$c(g)=c_0g^m+c_1g^{m-1}+\cdots+C_m$$

其中 a_i, $c_i\in\boldsymbol{C}$, 则该两个多项式的结式 $R[a(g),c(g)]$ 是下述行列式:

$$R[a(g), c(g)] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & & & & \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & c_0 & c_1 & \cdots & & c_{m-1} & c_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

多项式 $a(g)$ 与 $c(g)$ 具有公因子（次数大于零），当且仅当 $(n+m)$ 阶行列式为零，其中已设 a_0, c_0 不同时为零.

设用 $a'(g)$ 表示多项式 $a(g)$ 对 g 的微商，则多项式 $a(g)$ 的判别式是行列式 $D_g(a_0, a_1, \cdots, a_n)$，它由

$$D_g(a_0, a_1, \cdots, a_n) = R[a(g), a'(g)]$$

来定义. 多项式 $a(g)$ 具有重因子，当且仅当判别式 $D_g(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 为零. 现考虑形式为

$$\Phi(g, s) = b_0(s)g^t + b_1(s)g^{t-1} + \cdots + b_t(s), \quad t > 0$$

的多项式，其中系数 $\{b_i(s): i = 0, 1, 2, \cdots, t\}$ 均为 s 的多项式. 这个作为 g 的多项式的判别式可以用前面确定的 $D_g(b_0, b_1, \cdots, b_t)$ 通过用 $b_0(s), \cdots, b_t(s)$ 对应地取代 $b_0, \cdots, b_t$ 来求得. 于是存在一函数 $D_g(s)$，它也称为判别式且由下式定义：

$$D_g(s) = \frac{1}{b_0(s)} R[\Phi(g, s), \Phi'(g, s)]$$

其中 $\Phi'(g, s)$ 是 $\Phi(g, s)$ 对 g 的微商.

方法 2 (Sansone 与 Gerretsen [4])

考虑多项式

$$a(g) = a_0 g^n + a_1 g^{n-1} + \cdots + a_n, \quad n > 0$$

其中 $a_i \in \boldsymbol{C}$: 则 $a(g)$ 的判别式可按表达式

$$D_g(a_0, \cdots, a_n) = a_0^{2n-2}P$$

给出，其中 P 是一行列式

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \\ \cdots & & \cdots & \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \cdots & \sigma_{2n-2} \end{bmatrix}$$

而行列式的元 $\{\sigma_i : i = 1, 2, \cdots, 2n-2\}$ 是系数 $\{a_i : i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$ 的函数，且

$$\sigma_0 = n$$

元 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 满足下述方程:

$$a_1 + a_0\sigma_1 = 0$$

$$2a_2 + a_1\sigma_1 + a_0\sigma_2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)a_{n-1} + a_{n-2}\sigma_1 + \cdots + a_0\sigma_{n-1} = 0$$

而 $\sigma_n, \sigma_{n+1} \cdots \sigma_{2n-2}$ 可由下述方程求得:

$$a_n\sigma_0 + a_{n-1}\sigma_1 + \cdots + a_0\sigma_n = 0$$

$$a_n\sigma_1 + a_{n-1}\sigma_2 + \cdots + a_0\sigma_{n+1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n\sigma_m + a_{n-1}\sigma_{m+1} + \cdots + a_0\sigma_{n+m} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

现考虑多项式

$$\Phi(g,s) = b_0(s)g^t + b_1(s)g^{t-1} + \cdots + b_t(s)$$

这一作为 g 的多项式的判别式可以用前面定义的 $D_g(b_0, \cdots, b_t)$ 通过用 $b_0(s), \cdots, b_t(s)$ 对应地取代 $b_0, \cdots, b_t$ 来得到*). 多项式 $\Phi(g, s)$ 具有重因子，当且仅当

$$D_g(s) = b_0^{2t-2}(s)P$$

---

*) 按方法 2，此处 $b_0, \cdots, b_t$ 实际应为 $a_0, a_1, \cdots, a_t$. ——译者注

为零，其中 P 为一矩阵的行列式，其元是系数 $\{b_i(s): i = 0, 1, 2, \cdots, t\}$ 的函数

4 一个构造对应开环增益矩阵 $G(s)$ 的代数函数的 Riemann 曲面定义域的方法

在第 3.3-4 节已经阐明对于 t 次的特征增益函数，对应的 Riemann 曲面是由 t 页复 s 平面沿在一些分支点与无穷远点之间的割口相互粘在一起而构成的. 虽然在某种意义之下割口是任意的(即不存在唯一的割口集合)，但去选择一个相容的集合仍然是一个问题，这里相容是指能辨识以什么次序可以将这些页联在一起. 为了解决这一问题本附录给出一个系统的方法. 这一方法的优点在于其作出的割口除了沿实轴的割口外其余的割口均以实轴为对称且经常平行于虚轴. 同样，由于这一方法直接应用于开环增益矩阵从而不需要去求特征方程，并且最后由相互连接的页组成的彼此不关联的集合表示的是不可约特征方程的 Riemann 曲面.

方法的基础在于对覆盖 s 平面的一个网格上的值寻求对应矩阵的特征值，然后将求得的特征值沿网格的线整理成连续的形式. 若传递函数是 $m \times m$ 阶的，将可以有效地表示 Riemann 曲面页数的 m 对应的 m 数组用来存放特征值，其过程与第 3.3-4 节中描述的解析开拓过程类似，那里圆盘上的个体点可作为唯一函数值的承受点. 这里 s 平面各页(数组)上的个体点也是作为函数值的承受点.

第一条沿着它计算特征值并加以整理的线是实轴，然后的计算与整理将沿着由实轴上点出发平行于虚轴的线进行，如图 42 所示. 由于下半平面的特征值仅仅是上半平面特征值的复共轭，因此计算工作仅需在上半平面进行. 继续这一

过程，则 s 平面被计算点所覆盖，特征值的 m 数组就被得到，它们在沿着实轴与和虚轴平行的线上是连续的但未必在与实轴相交的那些地方连续.

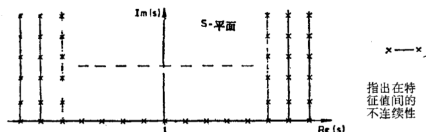


图 42　计算与整理特征值所要沿的线

通过观测每一数组和页次则必要的割口就清楚了. 如果平行于虚轴的一个特征值的线是与邻近的一个线之间不连续，则它们之间必然被一个由一个分支点出发终结在另一个分支点或无穷远点的割口所分离；如图 43(a)，(b) 所示.

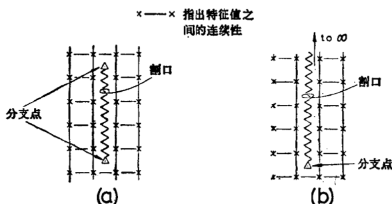


图 43　平行于虚轴的割口
(a) 有限的；(b) 无穷的

对应上半平面 s 值的特征值是其在下半平面对应值的复共轭，因此当在实轴上算出的特征值为复数时，通过实轴而要求特征值连续就是不可能的. 因此当实轴上特征值为复数

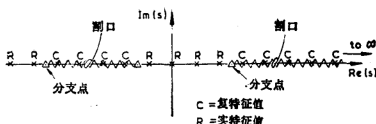


图 44　沿实轴的割口

时，一个沿实轴的割口就是必要的了．又所有的割口均是由分支点出发而终结在分支点或无穷远点，如图 44 所示．

用对比在割口一边一页上的特征值与割口另一边的特征值的办法，把各页互相进行粘合也就比较显然了．一般讲，当这种对比过程完成时，一些由彼此联通的页组成的集就形成了，每一个集均定义一个 Riemann 曲面．

使辨识割口和对比页次的工作简化对于在各页上描画等位相与等辐值回线的工作是十分有用的，这已由正文中给出的例子所说明．由于实轴极点的似然性，沿着实轴计算与整理特征值可能有困难．当第一根计算与整理的线变至平行于实轴且保持一较大距离时，上述困难就可望得到克服．当沿此线的计算与整理的工作终止后，进一步的计算与整理，将沿由这根新线出发终止在实轴上而与虚轴平行的线进行，如图

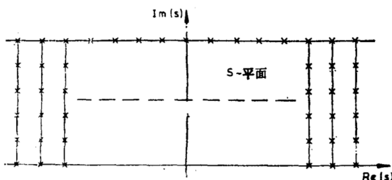


图 45　计算与整理特征值所要沿的线(改进方法)

45 所示。 利用这一新方法可能的割口仅仅是或者在实轴上或者在复共轭分支点之间，如图 46 所示。

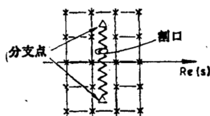


图 46 平行于虚轴的割口(改进方法)

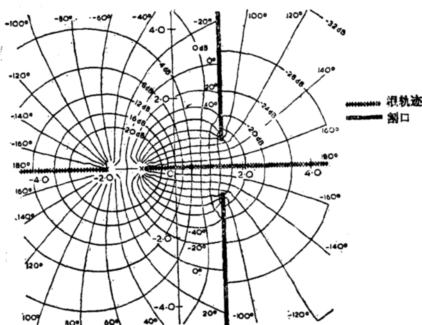


图 47 第 1 页 Riemann 曲面

对于

$$G(s)=\frac{1}{1.25(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}5s-2 & 2s-1\\ 3s-18 & s-8\end{bmatrix}$$

用原来的办法所作的 Riemann 曲面的构造如图 47 与 48 所

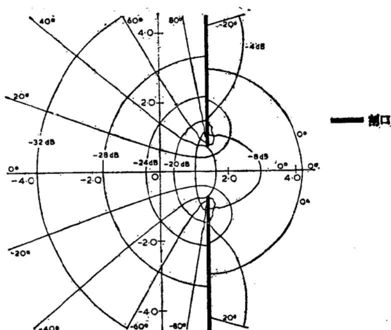


图 48　第 2 页 Riemann 曲面

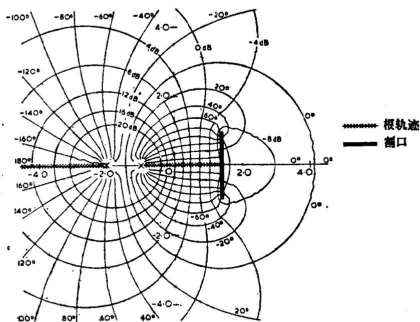


图 49　第 1 页 Riemann 曲面（改进的构造方法）

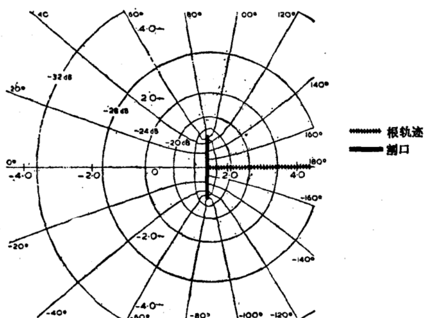


图 50　第 2 页 Riemann 曲面（改进的构造方法）

示，图 49 与 50 是应用改进了的办法画的并以此说明割口的任意性.

5　扩展了的辐角原理

辐角原理按我们所要求的扩展在文献中看来还不易找到，虽然对于一般多值解析函数说来，原理的合适的提法已经在有关书中出现了. [Evgrafov 5, p. 98]. 因此，为在第四、五章中运用恰当，这里将给出辐角原理一个合适的扩展.

A5.1　引言

我们所要求的扩展是不明显的这需要解决两个问题. 第一个是由这样一个事实提出来的，即一般讲代数函数的 Riemann 曲面是多连通的. 这里举一个表明困难缘由的例，考虑

与 2×2 开环增益矩阵 $G(s)$ 相联系的特征增益函数 $g(s)$，设 $g(s)$ 具有 4 个分支点且每个分支点均联系到两页的循环[6]，于是联系到 Riemann 曲面的亏格数是 1[6, 7]. 进而设这些支点按图 51 的办法设置在频率平面上（s 平面）. 取两层的复数球（Riemann 数球），在分支点间作割口，于是用常见的方法这个 Riemann 曲面将拓扑等价于一个圆环面[7]，如图 52 与 53 所示. 对在环面上边界为 $\partial\Omega$ 的具有阴影的区域 Ω，它对应的是后来在其上构造出环面的原复数球上一对 Nyquist D 回线的内部（如图 52 所示）. 面对这样一种情形，我们必须保证辐角原理的扩展能对于 Riemann 曲面上这样的区域成立，即它不是单连通的而且其边界可以由几个互相分离的闭 Jordan 曲线所构成. 原理的这样一个基本的进展是利用 Cauchy 留数定理的适当推广来完成的，而后者在第 A5.2 节中论述.

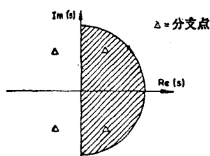


图 51 频率平面

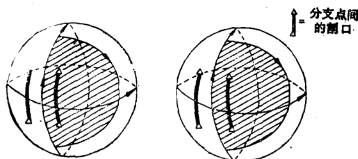


图 52 两层复数球

在导出合适的扩展了的辐角原理的过程中，要克服的第二个障碍是直接与代数函数的分支点相联系的情况. 在这一

情况下将影响到用绕边界 $\partial\Omega$ 计算回路积分以算出留数来，$\partial\Omega$ 包围的区域 Ω 以分支点为自己的内点. 这个问题可以通过复变量的改变的办法加以克服，这将在第A5.3 节中提出.

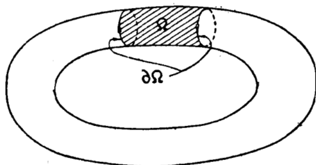


图 53　所示的 Riemann 曲面拓扑等价于圆环面

最后在第 A5.4 节将联合第 A5.2 与第 A5.3 两节的结果给出所要求的扩展了的辐角原理.

A5.2 Cauchy 留数定理的广义形式

基本的要求是将 Cauchy 留数定理推广至定义在某些已知代数函数的 Riemann 曲面上的复变函数上，这里积分区域可以是非单连通的而且其边界可以是由一个或几个闭 Jordan 曲线所组成. 这一推广可以在 Bliss [6] 的著作中找到. 主要定理将给在下面，但为了适应这本书的要求将在符号与写法上作些变更. 为了帮助不熟悉 Riemann 曲面的读者了解定理，指出下述两点是有用的.

(i) 在代数函数 $f(s)$ 的 Riemann 曲面上的每个非奇异位置（或点）唯一地被一对值 (f, s) 所确定，这一对值满足一已知代数方程

$$\Delta(f, s) = 0$$

因此在 Riemann 曲面上的每一点，复变量 s 与 f 这一对值的

复函数 $\Psi(f, s)$ 是已定义了的.

(ii) 对于一代数函数说来 Riemann 曲面是一有向曲面，于是可以在其上定义一个正向以使在此意义下一边界 $\partial\Omega$ 被扫过就和它围绕某区域 Ω 一致. 实现这一手段最简单的方法就是想象有人在 Ω 所在的二维流形上（该流形嵌在一熟悉的三维空间中)顺着边界 $\partial\Omega$ 行走,其绕行的正向系指在此意义下顺着 $\partial\Omega$ 的任一部分前进总使 Ω 在行走者的右方.在图 53 上边界 $\partial\Omega$ 就是按正向画出的.

广义留数定理

令 $\boldsymbol{R}$ 系一代数函数 $f(s)$ 的 Riemann 曲面，Ω 是 $\boldsymbol{R}$ 的一部分其边界由一个或几个不经过 Riemann 曲面的奇异位置的 Jordan 闭曲线所组成,但其本身未必要求单连通. 若一 $\boldsymbol{R}$ 上的位置函数 $\Psi(f, s)$ 在 Ω 与 $\partial\Omega$ 上除在 Ω 内可能出现的有限个奇点外均解析,则有

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\partial\Omega}\Psi(f, s)ds = \Sigma\Psi(f, s)\text{ 在 }\Omega\text{ 内的留数} \quad (\text{A5.2.1})$$

其中边界 $\partial\Omega$ 是在相对 Ω 为正的意义下扫过的.

为了推导扩展的辐角原理，首先将广义留数定理应用于函数 $f'(s)/f(s)$,其中 $f'(s)$ 表 $f(s)$ 对 s 的导数,这样就给出了

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(s)}{f(s)}ds = \Sigma\text{ 在 }\Omega\text{ 内 }\frac{f'(s)}{f(s)}\text{ 的留数}$$

注意 $f(s)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上必须没有极点与分支点(它们二者均作为奇异位置). 为了推导出辐角原理我们也认为 $f(s)$ 在 $\partial\Omega$ 上没有零点. 下一步就来计算在 Ω 内 $\dfrac{f'(s)}{f(s)}$ 的留数.

A5.3 留数的计算

$f(s)$ 的极点，零点与分支点是 $\dfrac{f'(s)}{f(s)}$ 的奇点这一事实在

本节的讨论将是清楚的. 我们将考虑所有 $f(s)$ 的分支点，但结果仅仅是那些又是极点或零点的才是重要的.

在极点或零点(不包括那些与分支点相联系的)的邻域内 $f(s)$ 可以用一个确定的单值函数的级数表示. 对于一个 t_{p_i} 阶的极点 p_i，代数函数可以表示为

$$f(s)=\sum_{n=-t_{p_i}}^{\infty} a_n(s-p_i)^n, \quad a_{-t_{p_i}} \neq 0 \qquad (A5.3.1)$$

即

$$f(s)=\frac{\phi(s)}{(s-p_i)^{t_{p_i}}} \qquad (A5.3.2)$$

其中 $\phi(p_i) \neq \infty$ 且 $\phi(s)$ 在 p_i 的邻域内解析*). 这就给出

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=\frac{-t_{p_i}}{(s-p_i)}+\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \qquad (A5.3.3)$$

且由于 $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}$ 在 p_i 的邻域内解析，则函数 $\frac{f'(s)}{f(s)}$ 在 $s=p_i$ 有一简单极点其留数为 $-t_{p_i}$.

对于 $-t_{z_i}$ 阶零点 z_i，代数函数可用级数

$$f(s)=\sum_{n=t_{z_i}}^{\infty} c_n(s-z_i)^n, \quad c_{t_{z_i}} \neq 0 \qquad (A5.3.4)$$

表示，即

$$f(s)=(s-z_i)^{t_{z_i}}\theta(s) \qquad (A5.3.5)$$

其中 $\theta(z_i) \neq 0$ 且 $\theta(s)$ 在 z_i 的邻域内解析. 这就给出

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=\frac{t_{z_i}}{(s-z_i)}+\frac{\theta'(s)}{\theta(s)} \qquad (A5.3.6)$$

于是有 $\frac{f'(s)}{f(s)}$ 在 $s=z_i$ 有一简单极点其留数为 t_{z_i}.

为了确定在分支点的留数，作变量的替换 [6, p.81] 是必

---

*) $\phi(p_i)$ 还应不为零. ——译者注

要的，其过程如下：

在有限分支点 b_i 的邻域内代数函数可以表示成如下形式的级数[8]：

$$f(s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(\sqrt[r]{s-b_i})^n \tag{A5.3.7}$$

其中 r 是在分支点组成一个循环系的页数. 如果分支点是 $t_{p_i}^b$ 阶的极点且组成一个 r 页的循环，则可以有级数表达式

$$f(s)=\sum_{n=-t_{p_i}^b}^{\infty} d_n\ (\sqrt[r]{s-b_i})^n,\ d_{-t_{p_i}^b} \neq 0 \tag{A5.3.8}$$

相仿若分支点是 $t_{z_i}^b$ 阶的零点，则有

$$f(s)=\sum_{n=t_{z_i}^b}^{\infty} d_n\ (\sqrt[r]{s-b_i})^n,\ d_{t_{z_i}^b} \neq 0 \tag{A5.3.9}$$

否则

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n\ (\sqrt[r]{s-b_i})^n,\ d_0 \neq 0 \tag{A5.3.10}$$

这些表达式是多值的因而不便于确定留数，但如果作替换

$$s=b_i+x^r \tag{A5.3.11}$$

则可找到级数表达式(A5.3.8, 9 与 10)对应地为

$$f(x)=\sum_{n=-t_{p_i}^b}^{\infty} d_n x^n,\ d^b_{-t_{p_i}} \neq 0 \tag{A5.3.12}$$

$$f(x)=\sum_{n=t_{z_i}^b}^{\infty} d_n x^n,\ d^b_{t_{z_i}} \neq 0 \tag{A5.3.13}$$

与

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,\quad d_0 \neq 0 \tag{A5.3.14}$$

其中 $f(x)$ 理解为

$$f(x) \equiv f(b_i + x^r) \tag{A5.3.15}$$

这个替换已将代数函数映射到 x 平面，在这里已可用一个单值级数表达式表示。

由定义[6]在 b_i 的邻域内(除 b_i 自身可能外)解析的$\dfrac{f'(s)}{f(s)}$在 b_i 的留数是

$$(\text{留数})_{b_i} \triangleq \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds \tag{A5.3.16}$$

其中 C 是在 $\boldsymbol{R}$ 上的一闭正向 Jordan 曲线，它界定 b_i 的邻域 N，在 N 内 $\dfrac{f'(s)}{f(s)}$ 除可能 b_i 一点外均解析. 若对 s 用替换式(A5.3.11)，则有

$$\begin{aligned}(\text{留数})_{b_i} &\triangleq \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{C_x} \frac{f'(x)}{f(x)}\frac{dx}{ds}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{C_x} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \end{aligned} \tag{A5.3.17}$$

其中 C_x 是在 x 平面上界定原点一邻域的闭正向 Jordan 曲线. 于是$\dfrac{f'(s)}{f(s)}$在分支点 b_i 的留数就是$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$在原点的留数. 而$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$的留数是容易由其级数表达式得到的. 用前面同样的方法我们注意到在原点的邻域内$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$有

(i) 若分支点是 t_{p_i} 阶的极点，则$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$有一个具有留数 $-t^b_{p_i}$ 的简单极点；或

(ii) 若分支点为 $t^b_{z_i}$ 阶的零点，则$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$有一个具有留数 $t^b_{z_i}$ 的简单极点；

否则 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 是解析的.

A5.4 扩展了的辐角原理

将第 A5.3 节的结果结合到方程 (A5.2.2)，则有

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(s)}{f(s)}ds=\left[\sum_i t_{z_i}+\sum_i t^b_{z_i}\right]$$

$$-\left[\sum_i t_{p_i}+\sum_i t^b_{p_i}\right]$$

$$={}^{\#}Z-{}^{\#}P \tag{A5.4.1}$$

其中 ${}^{\#}Z$ 与 ${}^{\#}P$ 对应的是 $f(s)$ 在区域 Ω 内的总零点数与总极点数，Ω 是用边界 $\partial\Omega$ 按正向围绕的在代数函数 $f(s)$ 的 Riemann 曲面上的区域. 注意多重极点与零点必须按其阶次计算个数.

方程 (A5.4.1) 的左端等价于曲线集 Γ 围绕 f 平面上原点顺时针绕圈数的净和，而 Γ 是 $\partial\Omega$ 在 $f(s)$ 映射下的象. 表示这一顺时针绕数的净和为 $N(\Gamma, 0)$，则最终可得所要求的扩展了的辐角原理的形式:

$$N(\Gamma, 0)={}^{\#}Z-{}^{\#}P \tag{A5.4.2}$$

6 对于特征方程 $\Delta(g,s)=0$ 的多变量枢点

考虑特征方程

$$\Delta(g, s)=0 \tag{A6.1}$$

设我们已求得特征频率轨线的一个分支在 $k\to\infty$ 时 $s=\infty$ 周围的一个近似的形式是

$$s\simeq bk^{\alpha} \tag{A6.2}$$

若 ρ 是对应该渐近线的枢点，则对 $k=\infty$ 有

$$s = \rho + bk^{\alpha} \tag{A6.3}$$

或

$$k = \left(\frac{s-\rho}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{A6.4}$$

闭环极点依赖于 k 的关系由式(6.1.5)给出，即

$$\Gamma(k, s) = 0 \tag{A6.5}$$

因此在方程 (A6.5) 中替换 k 或 s，则可得 s 与 ρ 间的关系或 k 与 ρ 间的关系. 由于在方程 (A6.5) 中 s 的次数通常高于 k 的次数，我们总常考虑替换 k. 将式 (A6.4) 中的 k 代入式 (A6.5)，则有方程

$$Z(\rho, s) = 0 \tag{A6.6}$$

对 $s=\infty$ 求 ρ，因而在方程 (A6.6) 中令 $s=z^{-1}$，从而给出

$$Z(\rho, s) = Z(\rho, z^{-1}) = z^{-t}\Omega(\rho, z) = 0 \tag{A6.7}$$

其中 t 是式 (A6.6) 中 s 的最高次数. 方程

$$\Omega(\rho, 0) = 0 \tag{A6.8}$$

可给出多变量的枢点值 ρ.

例

考虑开环增益矩阵

$$G(s) = \frac{1}{s^4 - s^3 + 2s^2 - 25s + 29} \times \begin{bmatrix} -s^3 - 11s^2 - 29s + g2 & -20s^2 + 35s + 70 \\ 41s^2 - s - 91 & 33s^2 - 170s + 118 \end{bmatrix}$$

它具有一特征方程

$$\begin{aligned} \Delta(g,s) = {} & (s^4 - s^3 + 2s^2 - 25s + 29)g^2 \\ & - (-s^3 + 22s^2 - 199s + 210)g \\ & + (-33s + 594) = 0 \end{aligned}$$

应用第 6.2 节描述的方法，我们发现当 $k\to\infty$ 时特征频率轨线的无穷分支由下述近似给出:

$$s \simeq k \quad 和 \quad s \simeq \pm\sqrt{(-33k)}$$

为寻求对应二阶 Butterworth 模型 $j\sqrt{(33k)}$ 的极点，令

$$s = \rho + \sqrt{(-33k)}$$

以便给出

$$k = \frac{(s-\rho)^2}{-33}$$

由特征方程 $\Delta(g, s) = 0$ 则得到

$$\begin{aligned} \Gamma(s,k) = &(s^4 - s^3 + 2s^2 - 25s + 29) \\ &+ (-s^3 + 22s^2 - 199s + 210)k \\ &+ (-33s + 594)k^2 = 0 \end{aligned}$$

在其中替换掉 k 则有

$$\begin{aligned} Z(\rho,s) = &33^2(s^4 - s^3 + 2s^2 - 25s + 29) \\ &- 33(-s^3 + 22s^2 - 199s + 210) \\ &\times(-2\rho s + \rho^2) - 33s^2(22s^2 - 199s + 210) \\ &+ (-33s + 594)(-4s^3\rho + 6s^2\rho^2 - 4s\rho^3 + \rho^4) \\ &+ 594s^4 = 0 \end{aligned}$$

令 $s = z^{-1}$，则有

$$\begin{aligned} \Omega(\rho, z) = &33^2(1 - z + 2z^2 - 25z^3 + 29z^4) \\ &- 33(-1 + 22z - 199z^2 + 210z^3)(-2\rho + \rho^2 z) \\ &- 33(22 - 199z + 210z^2) + (-33 + 594z) \\ &\times(-4\rho + 6z\rho^2 - 4z^2\rho^3 + z^3\rho^4) + 594 = 0 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \Omega(\rho,0) = 33^2 - 66\rho - 33 \times 22 + 33 \\ \times 4\rho + 594 = 0 \end{aligned}$$

由此可以求得

$$\rho = -14.5$$

7 在增益与频率曲面上分支点与驻点间的联系

设从开环增益矩阵 $G(s)$ 得到一个用复增益变量 g 与复频率变量 s 的形如

$$F \triangleq f(g, s) = 0 \tag{A7.1}$$

的代数方程. 考虑下述由 F 的微商形成的方程:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_s = 0 \tag{A7.2}$$

与

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_g = 0 \tag{A7.3}$$

同时满足方程 (A7.1 与 2) 的 s 的值是频率曲面上的分支点; 而同时满足方程 (A7.1 与 3) 的 g 的值是增益曲面上的分支点.

若考虑 g 作为 s 的函数, 则 F 关于 s 的全微分为

$$\frac{dF}{ds} = \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_g + \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_s \frac{dg}{ds} \tag{A7.4}$$

或交换之, 考虑 s 为 g 的函数, 则有

$$\frac{dF}{dg} = \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_s + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_g \frac{ds}{dg} \tag{A7.5}$$

由方程 (A7.1), F 将恒为零, 因此其全微商必为零, 于是由方程 (A7.4 与 A7.5) 则有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_g = -\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_s \frac{dg}{ds} \tag{A7.6}$$

与

$$\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_s = -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_g \frac{ds}{dg} \tag{A7.7}$$

若在增益曲面上有一分支点, 则方程 (A7.3) 成立, 于是

由方程 (A7.6) 有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_s = 0 \quad 或 \quad \frac{dg}{ds} = 0$$

由此推出在频率平面上有一个分支点或一个驻点对应增益曲面上的分支点.

反之,若在频率曲面上有一分支点,则方程 (A7.2) 成立,于是由方程 (A7.7) 有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_g = 0 \quad 或 \quad \left(\frac{\partial s}{\partial g}\right) = 0$$

这可推出在增益曲面上有一个分支点或有一个驻点对应频率曲面上的分支点.

参 考 文 献

[1] B. A. Fuchs, and V. I. Levin, "Functions of a Complex Variable", International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, 1961 (translation of 1951 Russian original).

[2] F. M. Ayres, "Theory and Problems of Matrices", Schaum, New York, 1962.

[3] S. Barnett, "Matrices in Control Theory", Van Nostrand-Reinhold, London, 1971.

[4] G. Sansone, and J. Gerretsen, "Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable", Vol. 2, Wolters-Nordhoff, Groningen, 1969.

[5] M. A. Evgrafov, "Analytic Functions", Dover, New York, 1978.

[6] G. A. Bliss, "Algebraic Functions", Dover, New York, 1966 (reprint of 1933 original).

[7] G. Springer, "Introduction to Riemann Surfaces", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[8] K. Knopp, "Theory of Functions", Part 2, Dover, New York, 1947.

总 文 献

AYRES, F. M., "Theory and Problems of Matrices", Schaum, New York, 1962.

BARMAN, J. F., and KATZENELSON, J., Memorandum ERL-583, Electronics Research Laboratory, College of Engineering Univ. of California, Berkeley, 1973.

BARMAN, J. F., and KATZENELSON, J., "A generalized Nyquist-type stability criterion for multivariable feedback systems", Int. J. Control, 20, 593—622, 1974.

BARNETT, S., "Matrices in Control Theory", Van Nostrand-Reinhold, London, 1971.

BLISS, G. A., "Algebraic Functions", Dover, New York, 1966, (reprint of 1933 original).

BODE, H. W., "Network analysis and feedback amplifier design", Van Nostrand, Princeton, N. J., 1945.

BOHN, E. V. "Design and synthesis methods for a class of multivariable feedback control systems based on single variable methods", Trans. AIEE, 81, Part 2, 109—115, 1962.

BOHN, E. V. and KASVAND, T., "Use of matrix transformations and system eigenvalues in the design of linear multivariable control systems", Proc. IEE, 110, 989—997, 1963.

BOKSENBOM A. S. and HOOD, R., "General algebraic method applied to control analysis of complex engine types", National Advisory Committee for Aeronautics, Report NCA-TR-980, Washington D. C., 1949.

BRACEWELL, R., "The Fourier Transform and Its Applications", McGraw-Hill, New York, 1965.

CANNON, R. H., Jr., "Dynamics of Physical Systoms", McGraw-Hill, New York, 1967.

COHN, P. M., "Algebra", Vol. 1, Wiley, London, 1974.

DESOER, C. A., and CHAN, W. S., "The Feedback Interconnection of Lumped Linear Time-invariant Systems", J. Franklin Inst., 300, 335—351, 1975.

ELGERD, O. I., "Control System Theory", McGraw-Hill, New York, 1967.

EVANS, W. R., "Graphical Analysis of Control Systems", Trans. AIEE, 67, 547—551, 1948.

EVANS, W. R., "Control System Synthesis by Root Locus Method", Trans. AIEE, 69, 1—4, 1950.

EVANS, W. R., "Control System Dynamics", McGraw-Hill, New York, 1954.

FREEMAN, H., "A synthesis method for multipole control systems", Trans. AIEE, 76, 28—31, 1957.

FREEMAN, H., "Stability and physical realizability considerations in the synthesis of multipole control systems", Trans. AIEE, Part 2, 77, 1—15, 1958.

FUCHS, B. A., and LEVIN, V. I., "Functions of a Complex Variable", International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, 1961 (translation of 1951 Russian original).

GANTMACHER, F. R., "Theory of Matrices", Vol. 1, Chelsea, New York, 1959.

GOLOMB, M., and USDIN, E., "A theory of multidimensional servo systems", J. Franklin, Inst., 253(1), 28—57, 1952.

HILLE, E., "Analytic Function Theory", Vol. 1, Ginn and Co., U S. A., 1959.

HILLE, E., "Analytic Function Theory", Vol. 2, Ginn and Co., U. S. A., 1962.

JURY, E. I., "Inners and Stability of Dynamical Systems", Wiley, New York, 1974.

KALMAN, R. E., "When is a linear control system optimal?", Trans. ASME J. Basic Eng., Series D., 86, 51—60, 1964.

KAVANAGH, R. J., "Noninteraction in linear multivariable systems", Trans. AIEE, 76, 95—100, 1957.

KAVANAGH, R. J., "The application of matrix methods to multivariable control systems", J. Franklin Inst., 262, 349—367, 1957.

KAVANAGH, R. J., "Multivariable control system synthesis", Trans. AIEE, Part 2, 77, 425—429, 1958.

KONTAKOS, T., Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1973.

KNOPP, K., "Theory of Functions", Part 2, Dover, New York, 1947.

KOUVARITAKIS, B., and SHAKED, U., "Asymptotic behaviour of root-loci of multivariable systems", Int. J. Control, 23, 297—340, 1977.

KWAKERNAAK, H., "Asymptotic Root Loci of Multivariable Linear Optimal Regulators", IEEE Trans. Automatic Control, 21, 378—382, 1976.

KWAKERNAAK, H., and SIVAN, R., "Linear Optimal Control Systems", Wiley, New York, 1972.

MACFARLANE, A. G. J., "Dual system methods in dynamical analysis Pt. 2-Optimal regulators and optimal servo-mechanisms", Proc. IEE, 116, 1458—1462, 1969.

MACFARLANE, A. G. J., "Dynamical System Models", Harrap, London, 1970.

MACFARLANE, A. G. J., "Return-difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems", Proc. IEE, 117, 2037—2049, 1970.

MACFARLANE, A. G. J., and BELLETRUTTI, J. J., "The Characteristic Locus Design Method", Automatica, 9, 575—588, 1973.

MACFARLANE, A. G. J., and KARCANIAS, N., "Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory", Int. J. Control, 24, 33—74, 1976.

MACFARLANE, A. G. J. and KOUVARITAKIS, B., "A design technique for linear multivariable feedback systems", Int. J. Control, 25, 837—874, 1977.

MACFARLANE, A. G. J., KOUVARITAKIS, B., and EDMUNDS, J. M., "Complex variable methods for multivariable feedback systems analysis and design", Alternatives for Linear Multivariable Control, National Engineering Consortium, Chicago, 189—228, 1977.

MACFARLANE, A. G. J., and POSTLETHWAITE, I., "The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci", Int. J. Control, 25, 81—127, 1977.

MACFARLANE, A. G. J., and POSTLETHWAITE, I., "Characteristic frequency functions and characteristic gain functions", Int. J. Control, 26, 265—278, 1977.

MACFARLANE, A. G. J. and POSTLETHWAITE, I., "Extended Principle of the Argument", Int. J. Control, 27, 49—55, 1978.

MAYNE, D. Q., "The Design of Linear Multivariable Systems", Automatica, 9, 201—207, 1973.

MEES, A. I., and RAPP, P. E., "Stability criteria for multipleloop nonlinear feedback systems", Proc. IFAC Fourth Multivariable Technological Systems Symposium, Fredericton, Canada, 1977.

NYQUIST, H., "The Regeneration Theory", Bell System Tech. J., 11, 126—147, 1932.

OWENS, D. H., "A note on series expansions for multivariable rootloci", Int. J. Control, 26, 549—557, 1977.

POSTLETHWAITE, I., "The asymptotic behaviour, the angles of departure, and the angles of approach of the characteristic frequency loci", Int. J. Control, 25, 677—695, 1977.

POSTLETHWAITE, I., "A generalized inverse Nyquist stability criterion", Int., J. Control, 26, 325—340, 1977.

POSTLETHWAITE, I., "A note on the characteristic frequency loci of multivariable linear optimal regulators", IEEE Trans. Automatic Control, 23, 757—760, 1978.

RAYMOND, F. H., "Introduction a l'étude des asservissements multiples simultanes", Bull. Soc. Fran. des Mecaniciens, 7, 18--25, 1953.

ROSENBROCK, H. H., "On the design of linear multivariable control systems", Proc. Third IFAC Congress London, 1, 1—16, 1966.

ROSENBROCK, H. H., "Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array", Proc. IEE, 116, 1929—1936, 1969.

ROSENBROCK, H. H., "State Space and Multivariable Theory", Nelson, London, 1970.

ROSENBROCK, H. H., "Computer-aided control system design", Academic Press, London, 1974.

SAEKS, R., "On the Encirclement Condition and Its Generalization", IEEE Trans. on Circuits and Systems, 22, 780—785, 1975.

SANSONE, G., and GERRETSEN, J., "Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable", Vol. 2, Wolters-Nordhoff, Groningen, 1969.

SHAKED, U., "The angles of departure and approach of the root-loci in linear multivariable systems", Int. J. Control, 23, 445—457, 1976.

SPRINGER, G., "Introduction to Riemann Surfaces", Addison-Wesley, Reading Mass., 1957.

WHITELEY, A. L., "Fundamental Principles of Automatic Regulators and Servo Mechanisms", J. IEE, 94, Part IIA, 5—22, 1947.

WILLEMS, J. L., "Stability Theory of Dynamical Systems", Nelson, London, 1970.

索　引

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

其它